Висше Военноморско Училище "Н.Й.Вапцаров" – Варна

МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ ЗА УЧЕНИЦИ
ОТ XI И XII КЛАС

15 март 2014 г.

Задача 1. (8 т.) Уравнението

$$19m + 53n = 2014,$$

където m и n са цели положителни числа, има единствено решение (m, n). Да се намери това решение и да се сравнят числата m^n и n^m.

Задача 2. (12 т.) Да се намерят стойностите на реалните параметри p и q, за които всички решения на неравенството

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x + 1 \geq 0$$

са решения и на уравнението

$$|p - x| - |x + 1| = q.$$

Задача 3. (9 т.) Диагоналите на трапец с основи a и b, $a > b$, и височина h са взаимно перпендикулярни, а правите, определени от бедрата, сключват ъгъл α. Да се докаже, че

$$\frac{1}{h} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) \operatorname{cotg} \alpha.$$

Задача 4. (11 т.) Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB = 1$ и ъгъл при върха A равен на α. Кръг с център точка C и радиус r се допира външно до два кръга с центрове точките A и B.

а) Да се докаже, че сумата от лицата на трите кръга е

$$S = \pi[1 + 3r^2 - 2r(\sin \alpha + \cos \alpha)].$$

б) При каква стойност на r последните два кръга се допират помежду си? Ако това условие е изпълнено, да се намери най-малката стойност на S.