

**СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ ПО  
АВТОМАТИКА И СИСТЕМИ ЗА УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ВАК**

---

**НАТАЛИЯ ДАНАИЛОВА НИКОЛОВА**

**КОЛИЧЕСТВЕН РАЗМИТО-РАЦИОНАЛЕН  
АНАЛИЗ НА РЕШЕНИЯ**

**А В Т О Р Е Ф Е Р А Т**

**на**

**ДИСЕРТАЦИЯ**

**ЗА ПОЛУЧАВАНЕ НА НАУЧНАТА И ОБРАЗОВАТЕЛНА СТЕПЕН**

**“ДОКТОР”**

**ПО НАУЧНА СПЕЦИАЛНОСТ**

**02.21.07 - “АВТОМАТИЗИРАНИ СИСТЕМИ**

**ЗА ОБРАБОТКА НА ИНФОРМАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ”**

**НАУЧЕН РЪКОВОДИТЕЛ:**

**доц. д.т.н. инж. Кирил Тенекеджиев**

**РЕЦЕНЗЕНТИ:**

**ст.н.с. I ст. д.т.н. д.м.н. Красимир Атанасов**

**доц. д-р инж. Георги Сапунджиев**

**ВАРНА, 2007 г.**

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита пред Специализирания научен съвет по “Автоматика и системи за управление” при ВАК от разширен катедрен съвет на катедра “Икономика и мениджмънт” при ТУ-Варна.

Докторантката работи в Технически Университет-Варна към катедра “Икономика и мениджмънт” на Факултета по морски науки и екология.

Изследванията по монографията са извършени в периода от октомври 2005 г. до април 2007 г. в Технически университет-Варна (България), EUROCONTROL (Белгия) и via donau (Австрия).

Защитата на дисертационния труд ще се състои на ..... в зала .....  
на ..... на заседание на СНС по  
“Автоматика и системи за управление” при ВАК. Материалите по защитата са на разположение на  
интересуващите се в .....

Автор: Наталия Данаилова Николова

Заглавие: Количествен размито-рационален анализ на решения

Тираж: ..... броя

Печатна база на ТУ-Варна

# ОБЩА ХАРАКТЕРИСТИКА НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

## АКТУАЛНОСТ НА ПРОБЛЕМА

Често в практиката възникват ситуации, които изискват от даден вземащ решения (ВР) да направи избор измежду няколко алтернативи в условия на риск, който се отличава с висока сложност поради голямото количество информация, която трябва да се обработи, и който е важен за ВР или за хора, зависещи от него. Препоръчително е такива ситуации да се анализират чрез систематични техники за рационален избор, които да отчитат целите на ВР и да са лесни за приложение. Утвърдена техника от този тип е теорията за вземане на решения (ТВР) (известна още като количествен анализ на решенията или математика на рационалността), която подпомага ВР в избора измежду несигурни алтернативи. Основна нейна черта е възможността да се формулира адекватен критерий за избора на алтернатива във всяка конкретна задача, при отчитане на субективните предпочитания, отношението към риска и очакванията на вземащия решения (ВР). Тази теория е част от възникналата след Втората Световна Война научна дисциплина изследване на операциите.

Най-успешните приложения на ТВР са в нестандартизирани, рядко възникващи, неструктурирани ситуации, съдържащи голяма несигурност и имащи сериозни последствия. Количественият анализ все още предстои да развие потенциала си в сфери като правото, медицината и инженерните задачи.

Пречка пред по-широкото приложение на ТВР са емпирично доказаните несъответствия между нормативните правила на поведение при избор и реалните предпочитания, които хората декларираат при екстрахиране на субективна информация, върху която почива анализа. Затова все повече съвременни изследвания са насочени към изучаването на реалния характер на субективния измервателен процес, резултиращата от него интервална субективна информация, както и начините за нейното използване в нормативния количествен анализ.

Тъй като субективните оценки на реалните ВР са в интервална форма, то техните предпочитания частично нарушават изискванията за транзитивност и могат да се моделират с размити множества. ВР с такива предпочитания в дисертацията е наречен размито-рационален, а а неговите решения – размито-рационални.

## НАУЧНА ЗНАЧИМОСТ И НОВОСТ

Основна цел на настоящата дисертация е да се формулират, изследват и изучат основите на количествения анализ на размито-рационални решения, представляващ обобщение на теорията на полезността, използваща цялата налична информация в оценените от размито-рационалния ВР интервали на неопределеност на нужните параметри, както и неговата степен на песимизъм. Резултатите в дисертацията са насочени към разработването на рационални техники за анализ на реалната интервална субективна информация, генерирана от размито-рационалния ВР. Разработена и представена е група от техники, приложими в различни етапи на анализ на решения – моделиране на проблема, измерване на предпочитания, измерване на несигурността, отчитане отношението към риска. Обединяваща тяхна черта е стремежът да се анализира истинското мнение на индивида, без да се допуска нереалистично идеализиране на способностите му.

## ПРАКТИЧЕСКА ПОЛЕЗНОСТ НА РЕЗУЛТАТИТЕ

Част от резултатите в дисертацията са използвани при изпълнението на следните международни научноизследователски проекти, с участието на докторантката:

- Проект COE21ABSS/MSDM, наименование: “Center Of Excellence 21-st Century: ‘Creation of Agent-Based Social Systems Sciences’, Project1: ‘Mathematical System for Decision Making’ (MSDM)” (Образцов център в 21 век: Създаване на агентно-базирани техники за изследване на социални системи, Проект 1: Математическа система за вземане на решения), Министерство на образованието и науката на Япония;

- Проект BG/04/A/PL-166081, наименование: “Речни информационни услуги, базирани на рисковия анализ – RARIS”, осъществен със съдействието и финансовата подкрепа на Европейския

съюз, програма „Леонардо да Винчи”;

- Проект TRS-083/02\_PR#38232, наименование: “Pattern Recognition Feasibility Study for Decision Making in Non-Nonminal Situations (PRNN)” (Изследване на възможностите за приложение на разпознаването на образи при вземане на решения в аномални ситуации), EUROCONTROL, Белгия.

### **АПРОБАЦИЯ НА РЕЗУЛТАТИТЕ**

Идеите и подходите, които са изложени в дисертационния труд, са представени, обсъдени и изцяло отпечатани на английски език в следните международни конференции:

- IEEE International Conference of Intelligent Systems’2006, London, UK;
- IEEE International Conference of Intelligent Systems’2004, Varna, Bulgaria;
- International Conference on Automatics and Informatics, 3-6 October, Sofia, Bulgaria

Окончателните резултати от дисертационния труд са докладвани на разширен катедрен съвет на катедра “Икономика и мениджмънт” при Технически Университет-Варна, състоял се на 07.05.2007.

### **ПУБЛИКУВАНЕ НА РЕЗУЛТАТИТЕ**

Представените нови концепции в дисертационния труд са обект на публикации в списанията International Journal of General Systems, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Cybernetics and Information Technologies, Information Technologies and Control, Проблемы машиностроения и автоматизации и Машиностроене и машинознание (серия „Икономика и мениджмънт”).

### **ИМПАКТ ФАКТОР И ЦИТИРАНЕ**

Общият импакт фактор на публикациите по дисертационния труд е 0.855. Тези публикации са цитирани 3 пъти, от които 1 в чужбина и 2 в България.

### **СТРУКТУРА И ОБЕМ НА РАБОТАТА**

Дисертационният труд е в обем от 166 стр., от които 8 стр. литература и 5 стр. съдържание. Дисертацията съдържа 3 глави, 11 приложения и заключение. Приложенията са с обем от 128 стр. Използваните литературни източници са 216, от които 16 са на кирилица, а 200 са на латиница.

# СЪДЪРЖАНИЕ НА ДИСЕРТАЦИОННИЯ ТРУД

## ГЛАВА 1. Обзор на съвременните достижения в теорията на решенията

Известни са много подходи към проблема за индивидуален избор на алтернативи, като например итеративно многокритериално програмиране, аналитичен йерархичен процес, марковски процеси на решение, марковски потоци върху графи, приходно-разходен анализ, контролинг, Паретов анализ, многокритериално вземане на решения, размита логика и др. ТВР, която е обект на изследване в дисертацията, се разглежда като комбинация от техники, които подпомагат рационалния избор между алтернативи от страна на ВР, като отчитат неговите предпочитания, очаквания за бъдещето и отношение към риска. Отличителна черта на ТВР е възможността за количествено измерване на компонентите на решението, а именно предпочитания, очаквания и отношение към риска. Основен компонент на ТВР е теорията на полезността, която почива на идеите за непропорционалната зависимост между полезността на монетарната стойност и нейното количество.

Последователно са разгледани следните по-важни аспекти:

- мястото на ТВР сред другите теории за индивидуален избор на алтернативи;
- ранжиране на алтернативи при пълна определеност чрез ординална ценностна функция;
- моделиране на проблемите при риск чрез дървета, таблици на решение, диаграми на влияние и лотарии;
- описание на несигурността чрез субективни вероятностни разпределения и описание на процеса на оценяване на възли от субективно вероятностно разпределение;
- построяване на функция на полезност по предпочитанията на ВР върху дискретни, едномерни непрекъснати и многомерни награди;
- интерпретиране на отношението към риска в едномерната функция на полезност и нейното аналитично апроксимиране чрез математически форми;
- изчисляване на очакваната полезност на различни видове класически лотарии;
- избор на алтернативи при пълна несигурност и условия за неговата рационалност;
- ранжиране на алтернативи с интервални и неточни вероятности и др.

Приложението на полезностния анализ изисква оценяване на множество параметри от ВР. Процесът на оценяване на даден параметър  $Par$  се свежда до решаване спрямо неизвестното  $h$  на преференциално уравнение между два обекта:

$$DO: h \in [h_{min} ; h_{max}]$$
$$Obj_1(h) \sim Obj_2 \quad (1.7.1)$$

Тук,  $Obj_2$  е фиксиран обект, докато  $Obj_1(h)$  е обект, зависещ от неизвестното  $h$ , като предпочитанията на ВР върху него са строго монотонни:

$$Obj_1(h_1) \succ Obj_1(h_2) \Leftrightarrow h_1 > h_2, \text{ за } h_1 \in [h_{min} ; h_{max}] \text{ и } h_2 \in [h_{min} ; h_{max}]. \quad (1.7.2)$$

Тогава условие за съществуването на решението  $h^*$  на (1.7.1) е :

$$Obj_1(h_{max}) \succeq Obj_2 \succeq Obj_1(h_{min}). \quad (1.7.3)$$

Случаите на строго монотонно намаляващи предпочитания могат да се сведат до строго нарастващия, например чрез полагането  $h' = -h$ .

Изисква се изпълнение на класическата оценителна предпоставка, т.е. предпочитанията на ВР върху  $Obj_1(h)$  и  $Obj_2$  да се декларират съгласно правилото за максималната очаквана полезност. Оттук се доказва единствеността на корена  $h^*$  на (1.7.1), при който  $E_1(u/h^*)$  на  $Obj_1(h^*)$  е равна на  $E_2(u)$  на  $Obj_2$ . Последното условие определя неявна връзка между  $Par$  и  $h^*$ :

$$F(Par, h^*) = E_1(u/h^*) - E_2(u) = 0, \quad (1.7.7)$$

$$Par^* = f(h^*). \quad (1.7.8)$$

Класическата оценителна предпоставка често се нарушава. Никой реален ВР няма безкрайни разграничителни способности и неговият избор в процеса на оценяване се отклонява от избора на идеалния

ВР. В резултат  $h^*$  не е единствен, а може да се намери само неговия интервал на неопределеност, като се оценят най-голямата стойност  $h_{down}$  на  $h$ , за която ВР счита, че  $Obj_2 \succ Obj_1(h)$  и най-малката стойност  $h_{up}$  на  $h$ , за която ВР счита, че  $Obj_1(h) \succ Obj_2$ . Тогава:

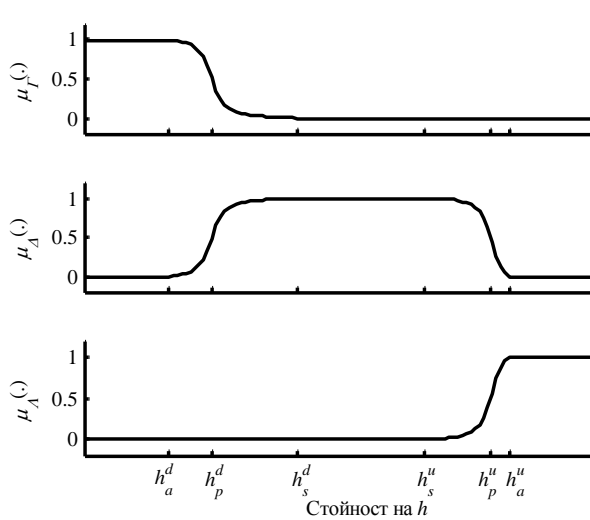
$$h^* \in [h_{down} ; h_{up}], \quad (1.7.9)$$

$$Par^* \in [Par_{down} ; Par_{up}]. \quad (1.7.10)$$

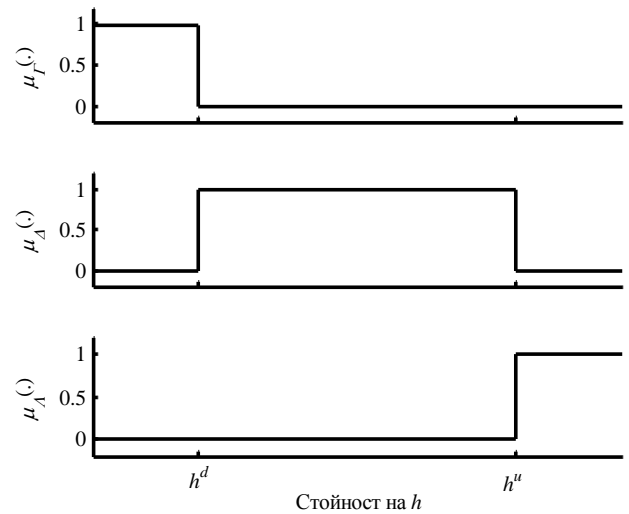
Поради интервалния характер на (1.7.9) за реалния ВР релацията  $\sim$  не е транзитивна, а релациите  $\succ$  и  $\sim$  не са взаимно транзитивни. Нека  $h_{up} \geq h_2 > h_1 \geq h_{down}$ , където  $h_{up} \in [h_{min} ; h_{max}]$ ,  $h_2 \in [h_{min} ; h_{max}]$ ,  $h_1 \in [h_{min} ; h_{max}]$  и  $h_{down} \in [h_{min} ; h_{max}]$ . Тогава за реалния ВР: а)  $Obj_1(h_1) \sim Obj_2$ ,  $Obj_2 \sim Obj_1(h_2)$  и  $Obj_1(h_2) \succ Obj_1(h_1)$ , въпреки че транзитивността на  $\sim$  предполага  $Obj_1(h_2) \sim Obj_1(h_1)$ ; б)  $Obj_1(h_2) \succ Obj_1(h_1)$ ,  $Obj_1(h_1) \sim Obj_2$  и  $Obj_1(h_2) \sim Obj_2$ , въпреки че транзитивността на  $\succ$  и  $\sim$  изисква  $Obj_1(h_2) \succ Obj_2$ ; в)  $Obj_2 \sim Obj_1(h_2)$ ,  $Obj_1(h_2) \succ Obj_1(h_1)$  и  $Obj_2 \sim Obj_1(h_1)$ , въпреки, че взаимната транзитивност на  $\sim$  и  $\succ$  изисква  $Obj_2 \succ Obj_1(h_1)$ .

Частично нетранзитивните предпочитания на реалния ВР могат да се моделират чрез три размити множества с еднакъв универсум  $U = \{ Obj_1(h) / h \in [h_{min} ; h_{max}] \}$ : 1) размито множество  $\Delta$  от обектите  $Obj_1(h)$ , които са безразлични на  $Obj_2$ , където  $\mu_{\Delta}[Obj_1(h)] = \mu_{\Delta}(h)$  е степен на принадлежност към  $\Delta$ ; 2) размито множество  $A$  от обектите  $Obj_1(h)$ , които са предпочитани пред  $Obj_2$ , където  $\mu_A[Obj_1(h)] = \mu_A(h)$  е степен на принадлежност към  $A$ ; 3) размито множество  $\Gamma$  от обектите  $Obj_1(h)$ , пред които  $Obj_2$  е предпочитан, където  $\mu_{\Gamma}[Obj_1(h)] = \mu_{\Gamma}(h)$  е степен на принадлежност към  $\Gamma$ .

Трите степени на принадлежност имат сума единица за всяко  $h$  и типично изглеждат като на фиг. 1.7.1 с 6 характерни стойности на  $h$  –  $h_a^d < h_p^d < h_s^d < h_s^u < h_p^u < h_a^u$ .



Фиг. 1.7.1. Степени на принадлежност  $\mu_{\Gamma}(h)$ ,  $\mu_{\Delta}(h)$  и  $\mu_A(h)$



Фиг. 1.7.2. Графика на степените на принадлежност  $\mu_{\Gamma}(h)$ ,  $\mu_{\Delta}(h)$  и  $\mu_A(h)$  при деклариране на предпочитания и безразличие

Дефинираните  $\mu_{\Delta}(h)$ ,  $\mu_A(h)$  и  $\mu_{\Gamma}(h)$  могат да се интерпретират като степени на безразличие и предпочитание на сравняваните обекти според реалния ВР, защото той

– уверено ще декларира безразличие между  $Obj_1(h)$  и  $Obj_2$  за  $h \in [h_s^d; h_s^u]$ ; този участък от графиката на  $\mu_{\Delta}(h)$  е наречен реална площадка;

– уверено ще декларира предпочитание на  $Obj_2$  пред  $Obj_1(h)$  за  $h \in [h_{min}; h_a^d]$ ;

– уверено ще декларира предпочитание на  $Obj_1(h)$  пред  $Obj_2$  за  $h \in [h_a^u; h_{max}]$ ;

– много или малко ще се колебае между безразличие и предпочитание на  $Obj_2$  пред  $Obj_1(h)$  за  $h \in [h_a^d; h_s^d]$ . Все пак ВР ще избере точка  $h_{down} \in [h_a^d; h_s^d]$ , над която ще декларира безразличие, а в противен

случай – предпочитание на  $Obj_2$  пред  $Obj_1(h)$ ;

– много или малко ще се колебае между безразличие и предпочитание на  $Obj_1(h)$  пред  $Obj_2$  за  $h \in [h_s^u; h_a^u]$ . Все пак ВР ще избере точка  $h_{up} \in [h_s^u; h_a^u]$ , под която ще декларира безразличие, а в противен случай – предпочитание на  $Obj_1(h)$  пред  $Obj_2$ .

Ако при решаването на (1.7.1) от реалния ВР се изисква да декларира или безразличие или някакво предпочитание (но не и колебание), то  $\Delta$ ,  $A$  и  $G$  се оценяват като класически, защото степените им на принадлежност се проявяват като показаните на фиг. 1.7.2. Търсеният интервал на неопределеност на  $Par$  ще бъде  $[h_{down}; h_{up}]$ . Може да се дефинира интервал на колебание  $h \in [h_a^d; h_a^u]$  от стойности на  $h$ , за които реалния ВР се колебае или е безразличен между двата обекта. Този интервал може да се оцени само ако реалния ВР разграничава концепциите за колебание и безразличие, което е нереалистично.

От литературния анализ могат да се направят следните изводи:

А) Очакваната полезност е предпочитан нормативен критерий за количествено вземане на решения, тъй като аксиоматично гарантира рационалност на избора на ВР във всяка конкретна ситуация.

Б) Приложението на полезностния анализ изисква оценяване на параметри, определящи субективните предпочитания, субективните очаквания и субективното отношение към риска на ВР. Процесът на оценяване на даден параметър винаги се свежда до явното или неявното решаване спрямо фиксирано неизвестно на преференциално уравнение между два обекта.

В) При емпиричните измервания се допуска, че е в сила класическата оценителна предпоставка, която често се нарушава в процеса на решаване на преференциалното уравнение поради ниската дескриптивност на теорията на полезността. Поради липсата на безкрайни разграничителни способности при реалния ВР, за коренът на преференциалното уравнение се намира само неговия интервал на неопределеност, който се трансформира в интервал на неопределеност за оценявания параметър.

Г) Поради интервалния характер на оценения корен, реалният ВР нарушава изискванията за транзитивност на  $\sim$  и взаимната транзитивност между  $\succ$  и  $\sim$ . Реалният ВР с крайни разграничителни способности никога не може да е напълно рационален, тъй като има частично нетранзитивни предпочитания, които могат да се моделират с размити множества. Такъв ВР е наречен размито-рационален, а неговите решения – размито-рационални.

Д) Липсва единна теория за количествен анализ на размито-рационални решения.

Основна цел на настоящата дисертация е да се формулират, изследват и изучат основите на количествения анализ на размито-рационални решения, представляващ обобщение на теорията на полезността, използваща цялата налична информация в оценените от размито-рационалния ВР интервали на неопределеност на нужните параметри, както и неговата степен на песимизъм.

Поставената цел може да се постигне, чрез решаването на следните задачи:

1) Модифициране и създаване на методи и алгоритми за:

а) полезно моделиране на предпочитанията, с отчитане на субективното отношение към риска на размито-рационалния ВР;

б) вероятно моделиране на субективните очаквания за състояние с частично измерена несигурност;

в) моделиране на различни типове размито-рационални алтернативи;

г) ранжиране на размито-рационални алтернативи при смесена постановка на риск и пълна несигурност, чрез създаване на критерии, обобщаващи очакваната полезност с критериите на Хурвиц<sub>α</sub> и Лаплас, като се отчитат песимизма и оптимизма на размито-рационалния ВР.

2) Създаване на софтуерен пакет от програми, реализиращ предложените алгоритми.

3) Демонстриране работоспособността и приложимостта на предложените методи, алгоритми и програми върху нетривиални примери, като се сравнят получените резултати с решения от съществуващи стандартни подходи.

## **Глава 2. Размита рационалност в теорията на полезност**

### **2.1. Размито-рационално моделиране на предпочитанията чрез полезности**

*2.1.1. Аналитична апроксимация на едномерна полезност при строго монотонни предпочитания*

Нека върху дадено ограничено едномерно непрекъснато множество от награди  $X$  се строи функция на полезност, моделираща строго нарастващи предпочитания на размито-рационален ВР:

$$x_i \succ x_j \Leftrightarrow x_i > x_j, \text{ за } x_i \in X, x_j \in X. \quad (2.1.1)$$

Нека  $x_{best} = \sup(X)$ , а  $x_{worst} = \inf(X)$ . Тогава е достатъчно да се построи едномерна функция на полезност  $u(\cdot)$  в интервала  $[x_{worst}, x_{best}]$ . Нека ВР да е оценен в интервална форма  $z-2$  вътрешни възли от графиката на  $u(\cdot)$  с координати  $(x_{u_l}, u_l)$ , за  $l=2, 3, \dots, z-1$ , където  $x_{u_l}$  и  $u_l$  са съответно полезностен квантил и индекс на полезностния квантил. Крайните възли са  $(x_{u_1}, u_1) = (x_{worst}, 0)$  и  $(x_{u_z}, u_z) = (x_{best}, 1)$ . В зависимост от използвания метод, наличната информация ще се описва или с (2.1.2) или с (2.1.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(x_l; \hat{u}_l^d; \hat{u}_l^u) / l=1, 2, \dots, z\}, \text{ където} \\ x_1 < x_2 < \dots < x_z, \\ 0 = \hat{u}_1^d \leq \hat{u}_2^d \leq \dots \leq \hat{u}_z^d = 1, \\ 0 = \hat{u}_1^u \leq \hat{u}_2^u \leq \dots \leq \hat{u}_z^u = 1, \\ \hat{u}_l^d < \hat{u}_l^u, \text{ за } l=2, 3, \dots, z-1, \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(\hat{x}_{u_l}^d; \hat{x}_{u_l}^u; u_l) / l=1, 2, \dots, z\}, \text{ където} \\ \hat{x}_{u_1}^d \leq \hat{x}_{u_2}^d \leq \dots \leq \hat{x}_{u_z}^d, \\ \hat{x}_{u_1}^d = \hat{x}_{u_1}^u \leq \hat{x}_{u_2}^u \leq \dots \leq \hat{x}_{u_z}^u = \hat{x}_{u_z}^d, \\ \hat{x}_{u_l}^d < \hat{x}_{u_l}^u, \text{ за } l=2, 3, \dots, z-1, \\ 0 = u_1 < u_2 < \dots < u_z = 1. \end{array} \right. \quad (2.1.3)$$

Нека аналитичната зависимост, апроксимираща полезността на размито-рационалния ВР е  $u = u(x, \bar{\mathbf{p}})$ , където  $\bar{\mathbf{p}} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  е  $n$ -мерен вектор от неизвестни параметри, принадлежащи на  $n$ -мерното множество  $\Pi$  и определящи формата на  $u(\cdot)$ . Тъй като крайните апроксимиращи възли не съдържат грешка, то трябва  $u(x_{worst}, \bar{\mathbf{p}}) = 0$ ,  $u(x_{best}, \bar{\mathbf{p}}) = 1$ , за  $\bar{\mathbf{p}} \in \Pi$ .

Ако оценките на възлите са от тип (2.1.2), то неизвестните параметри на  $\bar{\mathbf{p}}$  могат да се намерят чрез претеглен метод на най-малките квадрати, където отклонението на модела от най-добрата субективна точкова оценка в даден възел се претегля с ширината на интервала на неопределеност на индекса на полезностния квантил. Мярка за съгласуване на модела с данните (2.1.2) може да бъде

$$\chi_u^2 = \sum_{l=2}^{z-1} \left( \frac{2u(x_l, \bar{\mathbf{p}}) - (\hat{u}_l^d + \hat{u}_l^u)}{2(\hat{u}_l^u - \hat{u}_l^d)} \right)^2. \quad (2.1.7)$$

Оптималните параметри  $\bar{\mathbf{p}}_{opt}$  могат да се намерят с  $n$ -мерна минимизация на  $\chi_u^2$  по  $\bar{\mathbf{p}}$ :  $\bar{\mathbf{p}}_{opt} = \arg \left\{ \min_{\bar{\mathbf{p}}} \{ \chi_u^2(\bar{\mathbf{p}}) \} \right\}$ . Аналогични формули са изведени и за случай информация описана с (2.1.3).

В дисертацията се предлага използването на arctg-апроксимация (2.1.14) за която  $\bar{\mathbf{p}} = (a, x_0)$ , с  $\Pi = \{ (a, x_0) / a \in (0, \infty) \wedge x_0 \in (-\infty, \infty) \}$  а функцията на локална рискофобност приема вида (2.1.16):

$$u(x) = \frac{\arctg[a(x - x_0)] - \arctg[a(x_1 - x_0)]}{\arctg[a(x_z - x_0)] - \arctg[a(x_1 - x_0)]}, \quad (2.1.14)$$

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2a^2(x - x_0)}{1 + a^2(x - x_0)^2}. \quad (2.1.16)$$

Arctg-апроксимацията е подходяща за множества  $X$ , съдържащи печалби и загуби, защото (2.1.16) отговаря на най-разпространените отношения към риска. Параметърът  $a$  определя рискочувствителността на ВР, а  $x_0$  е инфлексната точка в  $u(\cdot)$ . Физическият смисъл на параметрите  $a$  и  $x_0$  спомагат за намирането на добри начални приближения при задачите за оптимизация. Наличието на аналитична обратна на (2.1.14)



разрешава параметрите да се намират сравнително бързо при данните от типа (2.1.2) и (2.1.3). Аналитичното построяване на функцията на полезност позволява филтриране на грешката в субективното измерване на полезност, при условие че избраната математическа форма правилно описва отношението към риска на размито-рационалния ВР. Ако оптималната апроксимирана крива минава през интервалите на неопределеност на оценените възли от функцията на полезност, то има голяма вероятност arctg-апроксимацията значително да редуцира неточностите в оценяването, тъй като използва вярна априорна информация за отношението към риска. В същото време, при големи отклонения на оптималната апроксимирана крива от интервалите на неопределеност, arctg-апроксимацията трябва да се замени с друга, тъй като отношението към риска на размито-рационалния ВР не е типичното, заложено в (2.1.14).

### 2.1.2. Едномерни полезности при немонотонни предпочитания

Понякога е необходимо върху ограничено едномерно непрекъснато множество от награди  $X$  да се построи функция на полезност, моделираща предпочитанията на даден размито-рационален ВР. Тогава  $x_{min} = \inf(X)$ , а  $x_{max} = \sup(X)$ . Едномерната функция на полезност  $u(\cdot)$  трябва да се строи в интервала  $[x_{min}; x_{max}]$ . Нека предпочитанията на размито-рационален ВР не са монотонни, а са псевдо-едноекстремални от два типа: а) хълмови, при които предпочитанията растат от  $x_{min}$  до  $x_{optmin}$ , не се изменят от  $x_{optmin}$  до  $x_{optmax}$  и намаляват от  $x_{optmax}$  до  $x_{max}$ , където  $x_{min} < x_{optmin} < x_{optmax} < x_{max}$ ; б) долинни, при които предпочитанията намаляват от  $x_{min}$  до  $x_{optmin}$ , не се изменят от  $x_{optmin}$  до  $x_{optmax}$  и растат от  $x_{optmax}$  до  $x_{max}$ , където  $x_{min} < x_{optmin} < x_{optmax} < x_{max}$ .

В разглеждания случай екстремумът на полезността  $x_{opt}$  ще съвпада или с  $x_{best}$  или с  $x_{worst}$ . При псевдо-едноекстремални предпочитания размито-рационалния ВР ще оцени интервал от точки с екстремна полезност  $[x_{optmin}; x_{optmax}]$ , които ще формират хоризонтална площадка в графиката на  $u(\cdot)$ , за разлика от идеалния ВР за когото се предполага, че може да идентифицира единствена  $x_{opt}$ , в която  $u(\cdot)$  ще има екстремум. Площадката на  $u(\cdot)$  представлява интервала на неопределеност на екстремума  $x_{opt}$ .

Определянето на интервала на неопределеност на  $x_{opt}$  е задача при пълна определеност, при която също се наблюдава размита рационалност. Преди построяването на псевдо-едноекстремалната полезностна (ценностна) функция върху интервала  $[x_{min}; x_{max}]$  е трудно да се сравняват награди от двете страни на площадката на екстремума и често се декларира безразличие. Това води до нарушаване на транзитивността между  $\sim$  и  $\succ$ . Дори и много мотивиран и рационален ВР може да прояви размита рационалност при оценка на интервала на екстремума, въпреки че е налице проблем при пълна определеност.

Нека за размито-рационален ВР с хълмови предпочитания са в сила следните допускания: 1) Истинските предпочитания на размито-рационалния ВР върху едномерни награди в интервала  $[x_{min}; x_{max}]$  строго растат от  $x_{min}$  до  $x_{opt}$  и строго намаляват от  $x_{opt}$  до  $x_{max}$ ; 2) Размито-рационалният ВР не може точно да осъзнае и изрази истинските си предпочитания, поради ограничените си разделителни способности; 3) Зоната на осъзнатите оптимални предпочитания на размито-рационалния ВР е в интервала от  $x_{optmin}$  до  $x_{optmax}$ , като той изразява безразличие между стойностите в този интервал, а истинската оптимална стойност  $x_{opt}$  принадлежи в интервала на неопределеност на екстремума  $[x_{optmin}; x_{optmax}]$ , където  $x_{min} < x_{optmin} < x_{opt} < x_{optmax} < x_{max}$ ; 4) При сравнението на награди от едната страна на интервала на неопределеност на екстремума, размито-рационалния ВР изразява предпочитание към тази, която е по-близо до оптимума; 5) Размито-рационалният ВР изразява строго предпочитание между награди от двете страни на интервала на неопределеност на екстремума, само ако е налице сравнително голяма разлика в истинските му предпочитания; 6) Ако размито-рационалният ВР истински предпочита  $x_i$  пред  $x_j$ , то той не изразява предпочитание на  $x_j$  пред  $x_i$ , при условие че  $x_i$  и  $x_j$  са от различни страни на интервала на неопределеност на екстремума; 7) Ако размито-рационалният ВР истински е безразличен между  $x_i$  и  $x_j$ , то той изразява безразличие между двете награди.

Оценяването на интервала на неопределеност на екстремума за случай на хълмови предпочитания може да се извърши в диалог с размито-рационалния ВР, който многократно ще сравнява двойки награди по предпочитание. За целта е разработен Алгоритъм 2.1.1 в 20 стъпки, който съществено използва метода на златното сечение. Аналогично е разгледан случая на долинни предпочитания.

В алгоритмите за оценка на награди с екстремни полезности могат да се използват различни едномерни оптимизационни техники. Методите на дихотомиите, на златно сечение и на Кийфър-Джонсън са сравнени за разглеждания случай на оптимизация на псевдо-едноекстремална ценностна функция от размито-рационален ВР. Оказва се, че макар и по-малко ефективен при итерациите, метода на златното сечение е за предпочитане поради възможността си да генерира по-адекватни резултати.

Нека даден размито-рационален ВР има хълмови предпочитания, с оценен интервал на неопределеност на екстремума и според него  $x_{min} \succ x_{max}$ . За приложението на метода на вероятностния еквивалент РЕ и метода на лотарийния еквивалент LE от т. 1.4.3.2 е необходимо да се определят  $x_{best}$  и  $x_{worst}$ . Тук,  $x_{worst} \equiv x_{max}$ , а  $x_{best}$  е произволна награда от  $[\hat{x}_{optmin}; \hat{x}_{optmax}]$ , например  $\hat{x}_{opt} = (\hat{x}_{optmin} + \hat{x}_{optmax}) / 2$ .

Класическите PE и LE могат да се използват за построяване на функцията на полезност в интервала от  $\hat{x}_{opt\ max}$  до  $x_{max}$ , но в интервала от  $x_{min}$  до  $\hat{x}_{opt\ min}$  те ще изискват сравнение на награди от различни страни на интервала на екстремума. Такива сравнения са трудни за размито-рационалния ВР дори и при пълна определеност.

Препоръчва се да се построят две локални функции на полезност: а) в интервала  $[x_{min}; \hat{x}_{opt\ min}]$ , като  $x_{best, left} \equiv \hat{x}_{opt\ min}$  и  $x_{worst, left} \equiv x_{min}$ ; б) в интервала  $[\hat{x}_{opt\ max}; x_{max}]$ , като  $x_{best, right} \equiv \hat{x}_{opt\ max}$  и  $x_{worst, right} \equiv x_{max}$ .

Накрая е необходимо да се оцени глобалната полезност на  $x_{min}$ , чрез която да се мащабира лявата локална функция на полезност и да се построи функцията на полезност върху целия интервал  $[x_{min}; x_{max}]$ . Глобалната полезност на  $x_{min}$  може да се оцени чрез методи от типа на PE и LE, при  $x_{best, global} = \hat{x}_{opt}$  и  $x_{worst, global} = x_{max}$ . Формираното преференциално уравнение се решава трудно, но само веднъж, като най-често полезностите на  $x_{min}$  и  $x_{max}$  са много различни.

Предлаганият подход е приложим за случай на хълмови предпочитания с всеки метод за оценка на възли от строго монотонна едномерна функция на полезност, съгласно разработения 10 стъпков Алгоритъм 2.1.3. Аналогични идеи се прилагат за случая на долинни предпочитания.

### 2.1.3. Равномерен метод за точкова оценка на интервално оценени скалиращи константи при построяване на многомерни функции на полезност

Нека  $\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$  е разделено от ВР на възможно най-голям брой взаимно-полезностно независими базови векторни атрибути  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . Предпочитания, които са взаимно адитивно независими по отношение на базовите векторни атрибути, ще се означават като MAVI предпочитания. Предпочитания, които са взаимно полезностно независими, но не са взаимно адитивно независими по отношение на базовите векторни атрибути, ще се означават като MUVI предпочитания. Предпочитания, които са взаимно адитивно независими по отношение на атрибутите, ще се означават като MASI предпочитания. Предпочитания, които са взаимно полезностно независими, но не са взаимно адитивно независими по отношение на атрибутите, ще се означават като MUSI предпочитания.

В Приложение 5 е представен алгоритъм за оценка на интервала на неопределеност на скалиращата константа  $k_{y,j}$  на базовия векторен атрибут  $Y_j$  от размито-рационален ВР. Определянето дали сумата на скалиращите константи е единица е важно за изграждане на функцията на полезност върху многомерни награди при полезностна независимост. Решението на този въпрос води първо до намирането на адекватни точкови оценки на  $k_{y,j}$  и второ до определяне вида на многомерната полезностна функция, като адитивен или мултипликативен. Ако и да е възможно някои или даже всички константи да са напълно известни, то на практика болшинството от тях се оценяват с интервали на неопределеност. Нека константите са преномерирани по низходящ ред на големината на техните интервали на неопределеност.

#### Задача 2.1.1.

Дадено:

$$\begin{aligned} k_{y,j} &\in [k_{y,j}^d; k_{y,j}^u], \text{ за } j=1, 2, \dots, n, \\ k_{y,j}^u - k_{y,j}^d &\geq k_{y,j+1}^u - k_{y,j+1}^d \text{ за } j=1, 2, \dots, n-1, \\ 0 < k_{y,j}^d < k_{y,j}^u < 1, &\text{ за } j=1, 2, \dots, m, \\ k_{y,j}^d &= k_{y,j}^u, \text{ за } j=m+1, m+2, \dots, n, \\ 0 &\leq m \leq n. \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Търси се:

- Да се установи равен ли е на 1 сборът  $k_{y,1} + k_{y,2} + \dots + k_{y,n}$ ?
- Да се намерят точкови оценки на константите  $\hat{k}_{y,j}$ , за  $j=1, 2, \dots, n$ .

Решение на задача 2.1.1:

В решението ще се използват  $2n+1$  помощни константи, както следва

$$a_j = \sum_{i=1}^j k_{y,i}^d, \text{ за } j=1, 2, \dots, n, \tag{2.1.23}$$

$$b_j = \sum_{i=1}^j k_{y,i}^u, \text{ за } j=1, 2, \dots, n, \tag{2.1.24}$$

$$s = \frac{a_n + b_n}{2}. \quad (2.1.25)$$

Допуска се, че всяка неизвестна константа е разпределена равномерно в интервала си на неопределеност и има плътност

$$f_{k_{y,j}}(k_{y,j}) = \begin{cases} 0 & \text{при } k_{y,j} < k_{y,j}^d \\ \frac{1}{k_{y,j}^u - k_{y,j}^d} & \text{при } k_{y,j}^d \leq k_{y,j} \leq k_{y,j}^u \text{ за } j=1, 2, \dots, m. \\ 0 & \text{при } k_{y,j}^u < k_{y,j} \end{cases} \quad (2.1.26)$$

Въвеждат се  $n$  помощни променливи

$$y_j = \sum_{i=1}^j k_{y,i}, \text{ за } j=1, 2, \dots, n. \quad (2.1.27)$$

Има случаи, при които решението на така поставената задача е тривиално. Оценяването на константите по интервала им на неопределеност изисква значителни пресмятания, ако  $m > 0$ ,  $a_n < 1$  и  $b_n > 1$ . Тогава е необходимо да се намери закона на разпределение на  $y_n$ .

### 2.1.3.1. Закон на разпределение на сумата на скалиращите константи $y_n$ в нетривиален случай

Удобно е в този случай законът да се търси във форма на плътност на разпределение. Нека плътността на разпределение на  $y_j$  се означава с  $f_{y_j}(\cdot)$ , като ненулевата ѝ част лежи в затворения интервал  $[a_j; b_j]$ . За отговор на въпроса дали сборът на константите е 1, е необходимо да се оцени  $f_{y_n}(\cdot)$ , което може да се изчисли по  $f_{y_m}(\cdot)$ , защото разликата между  $y_n$  и  $y_m$  е константа:

$$f_{y_n}(y_n) = \begin{cases} f_{y_m}(y_n - \sum_{j=m+1}^n k_{y,j}^d) & \text{при } m \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ f_{y_m}(y_n) & \text{при } m=n \end{cases} \quad (2.1.29)$$

Следователно задачата се свежда до построяването на  $f_{y_m}(\cdot)$ , като при  $m=1$  и  $m=2$  построяването на  $f_{y_1}(\cdot)$  и на  $f_{y_2}(\cdot)$  не представлява сериозен проблем.

При  $m > 2$ ,  $f_{y_m}(\cdot)$  се строи рекурентно, като се решат  $(m-2)$  подзадачи:

“По известни  $f_{y_{j-1}}(\cdot)$  и  $f_{k_{y,j}}(\cdot)$  да се построи  $f_{y_j}(\cdot)$  за  $j=3, 4, \dots, m$ .”

Доказва се, че

$$f_{y_j}(y_j) = \begin{cases} 0 & \text{при } y_j \in (-\infty; a_j) \\ \frac{1}{S} \int_{a_{j-1}}^{y_j - k_{y,j}^d} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} & \text{при } y_j \in [a_j; a_{j-1} + k_{y,j}^u] \\ \frac{1}{S} \int_{y_j - k_{y,j}^u}^{y_j - k_{y,j}^d} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} & \text{при } y_j \in [a_{j-1} + k_{y,j}^u; b_{j-1} + k_{y,j}^d] \\ \frac{1}{S} \int_{y_j - k_{y,j}^u}^{b_{j-1}} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} & \text{при } y_j \in (b_{j-1} + k_{y,j}^d; b_j] \\ 0 & \text{при } y_j \in (b_j; \infty) \end{cases} \quad (2.1.55)$$

$$\begin{aligned}
S = & \int_{a_j}^{a_{j-1}+k_{y,j}^u} \int_{a_{j-1}}^{y_j-k_{y,j}^d} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} dy_j + \\
& + \int_{a_{j-1}+k_{y,j}^u}^{b_{j-1}+k_{y,j}^d} \int_{y_j-k_{y,j}^d}^{y_j-k_{y,j}^u} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} dy_j + \int_{b_{j-1}+k_{y,j}^d}^{b_j} \int_{y_j-k_{y,j}^u}^{b_{j-1}} f_{y_{j-1}}(y_{j-1}) dy_{j-1} dy_j
\end{aligned} \tag{2.1.56}$$

Изведените аналитични зависимости могат да бъдат числено апроксимирани. Нека  $\hat{f}_{y_j}(\cdot)$  е по части линейна апроксимация на  $f_{y_j}(\cdot)$  чрез  $N_j$  възела  $\{(y_i^{(j)}, f_i^{(j)})/i=1,2,\dots, N_j\}$ , за които е изпълнено условието  $y_1^{(j)} < y_2^{(j)} < \dots < y_{N_j}^{(j)}$ . Тогава

$$\hat{f}_{y_j}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < y_1^{(j)} \\ \frac{(y - y_i^{(j)})f_{i+1}^{(j)} + (y_{i+1}^{(j)} - y)f_i^{(j)}}{y_{j+1}^{(i)} - y_j^{(i)}} & \text{при } y_i^{(j)} \leq y < y_{i+1}^{(j)} \text{ за } i=1, 2, \dots, N_j - 1. \\ 0 & \text{при } y_{N_j} \leq y \end{cases} \tag{2.1.58}$$

Взлите на  $\hat{f}_{y_n}(\cdot)$  могат лесно да се изчислят по взлите на  $\hat{f}_{y_m}(\cdot)$ :

$$\left| \begin{aligned} y_i^{(n)} &= \begin{cases} y_i^{(m)} + \sum_{i=m+1}^n k_{y,i}^d & \text{при } m \in \{1, 2, \dots, n-1\} \\ y_i^{(m)} & \text{при } m=n \end{cases} \\ f_i^{(n)} &= f_i^{(m)} \end{aligned} \right. \quad \text{за } i=1, 2, \dots, N_j. \tag{2.1.59}$$

Следователно задачата се свежда до намирането на взлите на  $\hat{f}_{y_m}(\cdot)$ , като при  $m=1$  и  $m=2$  построяването на  $\hat{f}_{y_1}(\cdot)$  и на  $\hat{f}_{y_2}(\cdot)$  не представлява сериозен проблем. При  $m>2$ , взлите на  $\hat{f}_{y_m}(\cdot)$  ще се строят рекурентно, като се решат  $(m-2)$  подзадачи: “По известни взли на  $\hat{f}_{y_{j-1}}(\cdot)$  и  $f_{k_{y,j}}(\cdot)$  да се построят  $N_j$  взли на  $\hat{f}_{y_j}(\cdot)$ , за  $j=3, 4, \dots, m$ .” Всяка от подзадачите може да се реши по 6 стъпковия Алгоритъм 2.1.5.

Аналитични зависимости (2.1.55) и (2.1.56) могат също да бъдат получени чрез симулационно моделиране. В този случай е удобно законът да се търси във форма на класическа CDF  $F_{y_n}^n(\cdot)$ . Нека  $\hat{F}_{y_n}^n(\cdot)$  е по части линейна апроксимация на  $F_{y_n}^n(\cdot)$  чрез  $G$  възела  $\{(y_q^{s,4}, F_q^{s,4}) | q=1,2,\dots, G\}$ , за които

$$\left| \begin{aligned} y_1^{s,4} &< y_2^{s,4} < \dots < y_G^{s,4} \\ F_1^{s,4} &= 0 \\ F_G^{s,4} &= 1 \end{aligned} \right. \tag{2.1.63}$$

Оценки на взлите на  $\hat{F}_{y_n}^n(\cdot)$  могат да се намерят чрез симулационна процедура от тип Monte Carlo съгласно 8 стъпковия Алгоритъм 2.1.6.

### 2.1.3.2. Проверка на хипотеза за единичност на сумата на скалиращи константи

Въпросът дали  $k_{y,1}+k_{y,2}+\dots+k_{y,n}=1$  може да получи отговор в зависимост от сумите на долните и горните граници на константите. Ако условията за нетривиалност са нарушени, то може със сигурност да се определи дали сумата на скалиращите константи е или не е единица. Интерес представлява случая, когато  $a_n < 1$ , а  $b_n > 1$ , където може да се направи двустранен статистически тест с нулева хипотеза „сумата от скалиращите константи е единица” ( $H_0: y_n=1$ ) и алтернативна хипотеза „сумата от скалиращите константи е различна от единица” ( $H_1: y_n \neq 1$ ). Ако се избере ниво на значимост  $\alpha$  и се изчисли  $p_{value}$ , то

$$\begin{aligned} \text{ако } p_{value} \leq \alpha, \text{ то } H_0 \text{ се отхвърля и се приема } H_1, \\ \text{ако } p_{value} > \alpha, \text{ то } H_0 \text{ не се отхвърля.} \end{aligned} \quad (2.1.65)$$

Задача 2.1.1а) се свежда до оценка на стойността на  $p_{value}$ . Плътността на разпределение на  $f_{y_n}(\cdot)$  е симетрична спрямо правата  $y_n = s$ . Доказва се, че

$$p_{value} = \begin{cases} 2 \int_{a_n}^1 f_{y_n}(y) dy & \text{ако } s > 1 \\ 2 - 2 \int_{a_n}^1 f_{y_n}(y) dy & \text{ако } s \leq 1 \end{cases} \quad (2.1.81)$$

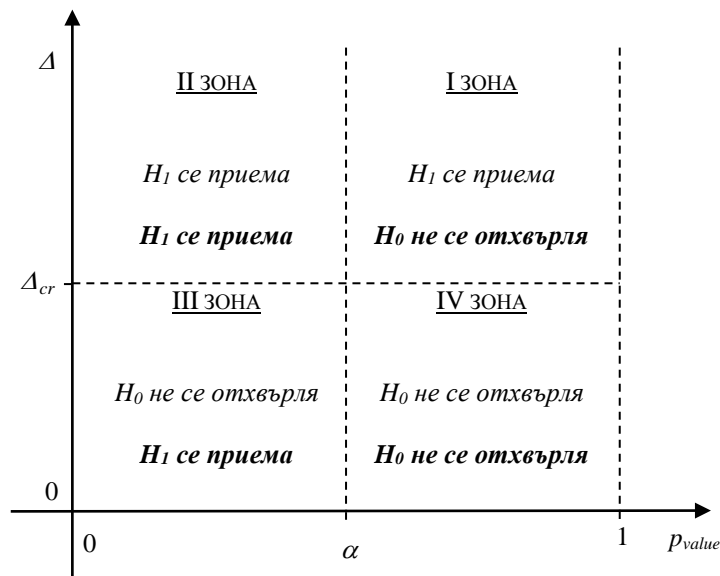
Изведената аналитична зависимост може да бъде числено апроксимирана с 4-стъпковия Алгоритъм 2.1.7. или симулационно оценена чрез

$$\hat{p}_{value} = \begin{cases} 2 \hat{F}_{y_n}^n(1) & \text{ако } s > 0.5 \\ 2 - 2 \hat{F}_{y_n}^n(1) & \text{ако } s \leq 0.5 \end{cases} \quad (2.1.84)$$

Точковите оценки на скалиращите константи и проверката дали сумата им е единица традиционно се прави по следващия алгоритъм: 1. Избира се малко положително число  $\Delta_{cr}$ ; 2. Оценяват се точково всички скалиращи константи и се намира сбора им  $s$ ; 3. Ако  $s \notin [1 - \Delta_{cr}, 1 + \Delta_{cr}]$ , то се приема, че сборът на скалиращите константи не е единица; 4. Ако  $s \in [1 - \Delta_{cr}, 1 + \Delta_{cr}]$ , то се приема, че сборът на скалиращите константи е единица. Нека този алгоритъм се нарича наивен метод. Нека  $\Delta = |s - 1|$ . Тогава:

$$\begin{aligned} \text{ако } \Delta > \Delta_{cr}, \text{ то } H_0 \text{ се отхвърля и се приема } H_1, \\ \text{ако } \Delta \leq \Delta_{cr}, \text{ то } H_0 \text{ не се отхвърля.} \end{aligned} \quad (2.1.91)$$

При фиксирани  $\alpha$  и  $\Delta_{cr}$ , резултатите от наивния и равномерния метод могат да се сравнят при различни стойности на  $p_{value}$  и  $\Delta$  (вж. фиг. 2.1.3).



Фиг. 2.1.3. Тестване на  $H_0$  и  $H_1$  по наивния (в курсив) и по равномерния метод (в получен шрифт) при дадени стойности на  $\alpha$  и  $\Delta$

Правите  $p_{value} = \alpha$  и  $|s - 1| = \Delta_{cr}$  разделят допустимата част от първи квадрант на координатната система  $(p_{value} - \Delta)$  на четири зони показани на фиг. 2.1.3. Сравнението показва, че двата метода не са еднозначни при различни комбинации от  $p_{value}$  и  $\Delta$ . Наивният метод не отчита ширината на интервалите на

неопределеност, тъй като използва само средните им стойности, когато решава дали сумата на константите е единица. От своя страна, равномерния метод взема в предвид цялата налична информация, извлечена от оценителя, но е значително по-тежък в изчислително отношение.

### 2.1.3.3. Точкови оценки на скалиращите константи

Решението на задачата 2.1.1b) е директно следствие от полученото от отговора на въпроса, поставен в задача 2.1.1.a). Ако  $H_0$  не се отхвърли, то може да се счита, че  $k_{y,1} + k_{y,2} + \dots + k_{y,n} = 1$ . Тогава:

$$\hat{k}_{y,j} = \beta k_{y,j}^d + (1 - \beta) k_{y,j}^u, \text{ за } j=1, 2, \dots, n, \quad (2.1.92)$$

$$\beta = \frac{b_n - 1}{b_n - a_n}. \quad (2.1.93)$$

В този случай многомерната функция на полезност се изгражда като адитивна.

Ако  $H_0$  се отхвърли и се приеме  $H_1$ , то:

$$\hat{k}_{y,j} = \frac{k_{y,j}^d + k_{y,j}^u}{2}, \text{ за } j=1, 2, \dots, n. \quad (2.1.94)$$

В този случай многомерната функция на полезност се изгражда като мултипликативна

### 2.1.4. Алгоритъм за построяване на многомерна полезност

Разгледаните в т. 2.1 процедури могат да се обединят в общ алгоритъм, който би бил полезен при построяване на многомерна функция на полезност от размито-рационален ВР.

#### Алгоритъм 2.1.8. Построяване на многомерна функция на полезност

1. Установява се взаимна полезностна независимост между  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ .
2. Декомпозира се всяка  $u_{y,j}(\cdot)$ , при  $d_j > 1$ , ако сред атрибутите има условно полезностно независими.
3. Построяват се всички недекомпозирани  $u_{y,j}(\cdot)$  при  $d_j > 1$  и всички многомерни декомпозирани части от  $u_{y,j}(\cdot)$  чрез Алгоритъм 1.4.2.
4. Построяват се всички едномерни полезности и едномерни декомпозирани части от  $u_{y,j}(\cdot)$ :
  - a) при немонотонни предпочитания се определя броя на локалните екстремуми и се разделя едномерното множество на наградите на сектори с псевдо-едноекстремални предпочитания. Във всеки сектор се оценява интервала на неопределеност на екстремума чрез Алгоритми 2.1.1 и 2.1.2 съответно при хълмови и долинни предпочитания. Дефинират се всички зони със строго монотонни предпочитания между площадките на намерените екстремуми;
  - b) при монотонни предпочитания цялото едномерно множество от награди се приема за една зона;
  - c) за всяка зона се оценяват интервалите на неопределеност на  $z$  възли от локалната функция на полезност по методите от втория случай на т. 1.4.3.2. Намира се arctg-апроксимация във всяка зона съгласно т. 2.1.1. Ако последната е незадоволителна, то тя се заменя с линейна интерполация;
  - d) При немонотонни предпочитания се строи глобална функция на полезност чрез неколкократно прилагане на Алгоритми 2.1.3 и 2.1.4, а при монотонни – локалната функция на полезност се приема за глобална.
5. Оценяват се интервалите на неопределеност на скалиращите константи съгласно Алгоритъм П5.1.
6. Определя се единичността на сумата на скалиращите константи по числена или сумалационна реализация на равномерния метод в т. 2.1.3 и се намира точкова оценка на константите.
7. Построява се многомерна функция на полезност съгласно Приложение 2.

## 2.2. Размито-рационално моделиране на несигурността чрез лентови вероятностни разпределения

Поради интервалния характер на вероятностните оценки, класическите DPF и CDF в Приложение 1 не могат адекватно да моделират частично оценената несигурност от размито-рационални ВР.

### 2.2.1. Едномерни лентови CDF

Нека несигурността в една едномерна случайна величина  $X$  е частично измерена чрез едномерна CDF  $F^R(\cdot)$ , за която е известно само, че изцяло лежи между две едномерни класически CDF, наречени долна и

горна гранични функции –  $F^d(\cdot)$  и  $F^u(\cdot)$ . Такава едномерна CDF ще се нарича лентова:

$$F^d(x) \leq F^R(x) \leq F^u(x), \text{ за } x \in (-\infty; +\infty), \quad (2.2.1)$$

$$F^d(x) \leq F^u(x), \text{ за } x \in (-\infty; +\infty). \quad (2.2.2)$$

Разпространен частен случай на едномерна лентова CDF е, когато (субективни) вероятностни разпределения се интерполират или апроксимират по възли с интервал на неопределеност за квантила. Такава лентова CDF ще се нарича  $x$ -лентова –  $F^{xR}(\cdot)$ , а граничните функции – долна и горна  $x$ -гранични  $F^{xd}(\cdot)$  и  $F^{xu}(\cdot)$ . Удобен начин на задаване на  $F^{xd}(\cdot)$  и  $F^{xu}(\cdot)$  е чрез линейна интерполация по краищата на зададени интервали на неопределеност за  $z > 1$  квантили на  $F^{xR}(\cdot)$ :

$$\{(x_l^d; x_l^u; F_l) / l=1, 2, \dots, z\}, \quad (2.2.3)$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1^d \leq x_2^d \leq \dots \leq x_z^d, \\ x_1^u \leq x_2^u \leq \dots \leq x_z^u, \\ x_l^d \leq x_l^u, \text{ за } l=2, 3, \dots, z-1, \\ x_1^d = x_1^u, \quad x_z^d = x_z^u, \\ 0 = F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_z = 1. \end{array} \right. \quad (2.2.4)$$

Друг разпространен частен случай на едномерна лентова CDF е, когато (субективни) вероятностни разпределения се интерполират или апроксимират по възли с интервал на неопределеност за квантилния индекс (грешка по ординатата, която е вероятност). Такава едномерна лентова CDF ще се нарича  $p$ -лентова –  $F^{pR}(\cdot)$ , а граничните функции – съответно долна и горна  $p$ -гранични –  $F^{pd}(\cdot)$  и  $F^{pu}(\cdot)$ .

Удобен начин на задаване на  $p$ -граничните функции е чрез линейна интерполация по краищата на зададени интервали на неопределеност на  $z > 1$  квантилни индекси на  $F^{pR}(\cdot)$ :

$$\{(x_l; F_l^d; F_l^u) / l=1, 2, \dots, z\}, \quad (2.2.8)$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_z, \\ 0 = F_1^d \leq F_2^d \leq \dots \leq F_z^d = 1, \\ 0 = F_1^u \leq F_2^u \leq \dots \leq F_z^u = 1, \\ F_l^d \leq F_l^u, \text{ за } l=2, 3, \dots, z-1. \end{array} \right. \quad (2.2.9)$$

### 2.2.2. Едномерни лентови DPF

Нека несигурността в една едномерна дискретна случайна величина  $X$  е частично измерена чрез едномерна DPF –  $f_d^R(\cdot)$ , за която е известно само, че изцяло лежи между две едномерни функции, наречени долна и горна гранични  $P^d(\cdot)$  и  $P^u(\cdot)$ . Такава едномерна DPF ще се нарича лентова и може да заема само една от фиксираните стойности  $x_1, x_2, \dots, x_r, \dots, x_t$ :

$$P^d(x_r) \leq f_d^R(x_r) \leq P^u(x_r), \text{ за } r=1, 2, \dots, t, \quad (2.2.13)$$

$$x_1 < x_2 < \dots < x_r < \dots < x_t. \quad (2.2.14)$$

$$0 \leq P^d(x_r) \leq P^u(x_r) \leq 1, \text{ за } r=1, 2, \dots, t, \quad (2.2.15)$$

$$\sum_{r=1}^t P^d(x_r) \leq 1 \leq \sum_{r=1}^t P^u(x_r). \quad (2.2.16)$$

Лентовата DPF –  $f_d^R(\cdot)$  не съдържа същата информация, както по части константната лентова CDF –  $F^R(\cdot)$ . Причината е, че двете описват различни части от несигурността на едномерната дискретна случайна величина. Поради това нито една от двете в общия случай не може да се построи от другата.

Всяка пълна група от несъвместими събития (група от хипотези) може частично да се опише

вероятностно чрез лентова DPF. Нека  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r, \dots, \theta_t$  са група от хипотези, а индексът на хипотезите да се разглежда като едномерна дискретна случайна величина  $R$  с  $t$  възможни стойности. Тогава:

$$P^d(\theta_r) = P^d(r) \leq f_d^R(r) = P(R=r) = P(\theta_r) \leq P^u(r) = P^u(\theta_r), \text{ за } r=1, 2, \dots, t. \quad (2.2.17)$$

Горното равенство разрешава в този случай лентовата DPF да се запише алтернативно като:

$$\langle \theta_r, P^d(\theta_r), 1 - P^u(\theta_r) \rangle, \text{ за } r=1, 2, \dots, t. \quad (2.2.18)$$

Величините  $P^d(\theta_r)$  и  $P^u(\theta_r)$  имат физически смисъл на долна и горна граница на интервала на неопределеност на вероятността за случване на събитието  $\theta_r$ , която най-често е субективна.

### 2.2.3. Многомерни лентови CDF

Нека несигурността в една  $d$ -мерна система от случайни величини  $(X_1, X_2, \dots, X_d)$  е частично измерена чрез  $d$ -мерна CDF –  $F^R(\cdot)$ , за която е известно само, че изцяло лежи между две  $d$ -мерни класически CDF, наречени долна и горна гранични функции –  $F^d(\cdot)$  и  $F^u(\cdot)$ . Такава многомерна CDF ще се нарича лентова (многомерна лентова CDF). Ако  $\bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_d)$  е  $d$ -мерен вектор с произволни фиксирани стойности, то:

$$F^d(\bar{x}) \leq F^R(\bar{x}) \leq F^u(\bar{x}), \text{ за } \bar{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2.19)$$

$$F^d(\bar{x}) \leq F^u(\bar{x}), \text{ за } \bar{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2.20)$$

Разгледани са частни случаи на лентови векторно-аргументни CDF (VACDF) (т. 2.2.3.2), лентови скаларно-аргументни CDF (SACDF) (т.2.2.3.2), лентови векторно-независими CDF (VICDF) (т.2.2.3.3) и на лентови скаларно-независими CDF (SICDF) (т.2.2.3.3).

## 2.3. Моделиране и ранжиране на размито-рационални алтернативи

Несигурността в алтернативите, стоящи пред размито-рационалния ВР, може частично да се опише с лентови вероятностни разпределения. Тези алтернативи не могат адекватно да се опишат с класическо-рискови лотарии и да се ранжират по правилото за максималната очаквана полезност. В настоящата точка, алтернативите, стоящи пред размито-рационалния ВР ще бъдат моделирани с размито-рационални лотарии, където несигурността е частично описана с лентови вероятностни разпределения. Размито-рационалните лотарии ще се ранжират на два етапа.

В първия етап, размито-рационалната лотария ще се апроксимира с някаква класическо-рискова, което е задача при пълна несигурност. Основната идея е при апроксимацията в този етап да се използва някой критерий  $Q$  при пълна несигурност. Получените апроксимиращи лотарии са наречени  $Q$ -лотарии. При вторият етап,  $Q$ -лотариите трябва да се ранжират. Тъй като това е проблем при риск, се използва правилото за очаквана полезност. Тази двуетапна процедура за ранжиране на размито-рационални лотарии е еквивалентна на въвеждането на критерий за ранжиране, наречен  $Q$ -очаквана полезност.

### 2.3.1. Размито-рационални OL

OL с едномерна лентова DPF ще се нарича размито-рационална.

Нека  $\theta_{i,r}$  ”да се получи наградата  $\bar{x}_{i,r}$  от  $i$ -тата алтернатива” има вероятност, принадлежаща на затворения интервал  $[P_i^d(\theta_{i,r}); P_i^u(\theta_{i,r})]$ . Тогава  $i$ -тата група от хипотези  $\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,r}, \dots, \theta_{i,t_i}$  е частично вероятностно описана с едномерна  $f_{d,i}^R(\cdot)$  с  $P_i^d(\cdot)$  и  $P_i^u(\cdot)$ . Алтернативите могат да се представят с размито-рационални OL:

$$l_i^{fr} = \langle \langle \theta_{i,1}, P_i^d(\theta_{i,1}), 1 - P_i^u(\theta_{i,1}) \rangle, \bar{x}_{i,1}; \langle \theta_{i,2}, P_i^d(\theta_{i,2}), 1 - P_i^u(\theta_{i,2}) \rangle, \bar{x}_{i,2}; \dots \dots; \langle \theta_{i,t_i}, P_i^d(\theta_{i,t_i}), 1 - P_i^u(\theta_{i,t_i}) \rangle, \bar{x}_{i,t_i} \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.2)$$

Размито-рационалните OL могат да се ранжират на два етапа:

1) Чрез избрано  $Q$ , всяка  $f_{d,i}^R(\cdot)$ , се апроксимира с класическа DPF –  $f_{d,i}^Q(\cdot)$ , такава че:



$$P_i^d(\theta_{i,r}) \leq f_{d,i}^Q(r) = P_i^Q(\theta_{i,r}) \leq P_i^u(\theta_{i,r}), \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \text{ при } i=1, 2, \dots, q, \quad (2.3.5)$$

Всяка дадена размито-рационална OL се апроксимира чрез класическо-рискова – Q-OL:

$$l_i^Q = \langle \langle \theta_{i,1}, P_i^Q(\theta_{i,1}) \rangle, \bar{x}_{i,1}; \langle \theta_{i,2}, P_i^Q(\theta_{i,2}) \rangle, \bar{x}_{i,2}; \dots; \langle \theta_{i,t_i}, P_i^Q(\theta_{i,t_i}) \rangle, \bar{x}_{i,t_i} \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.6)$$

2) Алтернативите се подреждат по низходящ ред на очакваните полезности на Q-OL:

$$E_i^Q(u / f_{d,i}^R) = \sum_{r=1}^{t_i} P_i^Q(\theta_{i,r}) u(\bar{x}_{i,r}), \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.7)$$

Полученият критерий (2.3.7) за ранжиране на размито-рационални OL ще се нарича *Q*-очаквана полезност.

Пресмятането на *Q*-очаквана полезност за *i*-тата размито-рационална OL се свежда до намирането на вероятностите  $P_i^Q(\theta_{i,r})$ , за  $r=1, 2, \dots, t_i$ , на Q-OL  $l_i^Q$ .

### Задача 2.3.1.

Дадено:

- критерий за пълна несигурност: *Q*
- дискретна функция на полезност:  $u(\cdot)$
- долна гранична функция  $P_i^d(\cdot)$  на лентова DPF –  $f_{d,i}^R(\cdot)$ , такава, че

$$0 \leq P_i^d(\theta_{i,r}) \leq 1, \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \quad (2.3.8)$$

$$\sum_{r=1}^{t_i} P_i^d(\theta_{i,r}) \leq 1; \quad (2.3.9)$$

- горна гранична функция  $P_i^u(\cdot)$  на лентова DPF –  $f_{d,i}^R(\cdot)$ , такава, че

$$P_i^d(\theta_{i,r}) \leq P_i^u(\theta_{i,r}) \leq 1, \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \quad (2.3.10)$$

$$\sum_{r=1}^{t_i} P_i^u(\theta_{i,r}) \geq 1. \quad (2.3.11)$$

Търси се:

- $t_i$  стойности на  $f_{d,i}^Q(\cdot) = P_i^Q(\theta_{i,r})$ , за  $r=1, 2, \dots, t_i$ , такава че

$$P_i^d(\theta_{i,r}) \leq P_i^Q(\theta_{i,r}) \leq P_i^u(\theta_{i,r}), \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \quad (2.3.12)$$

$$\sum_{r=1}^{t_i} P_i^Q(\theta_{i,r}) = 1. \quad (2.3.13)$$

Задача 2.3.1 е решена при използване на критериите на Лаплас (т. 2.3.1.1), Валд (т. 2.3.1.2), максимаксен критерий (т. 2.3.1.3) и критерий Хурвица (т. 2.3.1.4) при пълна несигурност.

Показани са много често използваните апроксимации по метода на изоставеното  $m$  (т. 2.3.1.5) и метода на нормираните средни (т. 2.3.1.6). При първия метод се оценява интервала на неопределеност на всички състояния, без  $m$ -тото, чиято вероятност се намира така, че да допълва до единица сумата от точковите оценки на другите състояния. При втория метод се оценява средната стойност на всички интервали на неопределеност, след което те да се нормират. Коментират се техните недостатъци в сравнение с критерия на *Q*-очаквана полезност.

### 2.3.2. Размито-рационални GL-I

Едномерна GL-I с едномерна лентова CDF ще се нарича размито-рационална:

$$g_i^{fr} = \langle F_i^R(x); x \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.25)$$

Тук,  $F_i^R(\cdot)$  е едномерна лентова CDF с долна и горна гранични функции  $F_i^d(\cdot)$  и  $F_i^u(\cdot)$ .

Едномерните размито-рационални GL-I могат да се ранжират на два етапа:

1) Чрез избрано  $Q$ , всяка  $F_i^R(\cdot)$  се апроксимира с едномерна класическа CDF  $F_i^Q(\cdot)$ :

$$F_i^d(x) \leq F_i^Q(x) \leq F_i^u(x), \text{ за } x \in (-\infty; +\infty), \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.26)$$

По този начин всяка дадена едномерна размито-рационална GL-I се апроксимира чрез едномерна класическо-рискова GL-I, която ще се нарича  $Q$ -генерализирана (едномерна Q-GL-I):

$$g_i^Q = \langle F_i^Q(x); x \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.27)$$

2) Алтернативите се подреждат по низходящ ред на очакваните полезности на едномерните Q-GL-I:

$$E_i^Q(u/F_i^R) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dF_i^Q(x). \quad (2.3.28)$$

Полученият критерий за ранжиране на едномерни размито-рационални GL-I ще се нарича  $Q$ -очаквана полезност. Разглеждат се частни случаи на едномерни  $x$ -размито-рационални (т. 2.3.2.2) и  $p$ -размито-рационални GL-I (т. 2.3.2.3). Пресмятането на  $xQ$ -очаквана полезност за едномерна  $x$ -размито-рационална GL-I, се свежда до намирането на вътрешни квантили:  $x_l^{Q,(i)}$ , за  $l=2, 3, \dots, z_i-1$  на  $xQ$ -GL-I  $g_i^{xQ}$ .

### Задача 2.3.2.

Дадено:

- критерий за пълна несигурност:  $Q$
- едномерна функция на полезност:  $u(\cdot)$
- брой на апроксимиращи възли:  $z_i > 1$
- квантилни индекси:  $F_l^{(i)}$  за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$0 = F_1^{(i)} \leq F_2^{(i)} \leq \dots \leq F_{z_i-1}^{(i)} \leq F_{z_i}^{(i)} = 1; \quad (2.3.35)$$

- долни граници на квантилите:  $x_l^{d,(i)}$ , за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$x_1^{d,(i)} \leq x_2^{d,(i)} \leq \dots \leq x_{z_i-1}^{d,(i)} \leq x_{z_i}^{d,(i)}; \quad (2.3.36)$$

- горни граници на квантилите:  $x_l^{u,(i)}$ , за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$x_1^{u,(i)} = x_1^{u,(i)} \leq x_2^{u,(i)} \leq \dots \leq x_{z_i-1}^{u,(i)} \leq x_{z_i}^{u,(i)} = x_{z_i}^{d,(i)}, \quad (2.3.37)$$

$$x_l^{d,(i)} \leq x_l^{u,(i)}, \text{ за } l=2, 3, \dots, z_i-1; \quad (2.3.38)$$

- крайни квантили:

$$x_1^{Q,(i)} = x_1^{d,(i)} = x_1^{u,(i)}, \quad (2.3.39)$$

$$x_{z_i}^{Q,(i)} = x_{z_i}^{d,(i)} = x_{z_i}^{u,(i)}. \quad (2.3.40)$$

Търси се:

- вътрешни квантили:  $x_l^{Q,(i)}$ , за  $l=2, 3, \dots, z_i-1$ , такива, че

$$x_1^{Q,(i)} \leq x_2^{Q,(i)} \leq \dots \leq x_{z_i-1}^{Q,(i)} \leq x_{z_i}^{Q,(i)}, \quad (2.3.41)$$

$$x_l^{d,(i)} \leq x_l^{Q,(i)} \leq x_l^{u,(i)}. \quad (2.3.42)$$

Задача 2.3.2 е решена при използване на критериите на Лаплас (т. 2.3.2.2.1), Валд (т. 2.3.2.2.2), максимаксен критерий (т. 2.3.2.2.3) и критерий Хурвица (т. 2.3.2.2.4) при пълна несигурност.

Аналогично, пресмятането на  $pQ$ -очаквана полезност за едномерна  $p$ -размито-рационална GL-I се свежда до намирането на вътрешни квантилни индекси:  $F_l^{pQ,(i)}$ , за  $l=2, 3, \dots, z_i-1$  на  $pQ$ -GL-I  $g_i^{pQ}$ .

### Задача 2.3.3.

Дадено:

- критерий за пълна несигурност:  $Q$
- едномерна функция на полезност:  $u(\cdot)$
- брой на апроксимиращи възли:  $z_i > 1$

– квантили:  $x_l^{(i)}$ , за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$x_1^{(i)} \leq x_2^{(i)} \leq \dots \leq x_{z_i}^{(i)}; \quad (2.3.61)$$

– долни граници на квантилните индекси:  $F_l^{d,(i)}$ , за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$0 = F_1^{d,(i)} \leq F_2^{d,(i)} \leq \dots \leq F_{z_i-1}^{d,(i)} \leq F_{z_i}^{d,(i)} = 1; \quad (2.3.62)$$

– горни граници на квантилните индекси:  $F_l^{u,(i)}$ , за  $l=1, 2, \dots, z_i$ , за които

$$0 = F_1^{u,(i)} \leq F_2^{u,(i)} \leq \dots \leq F_{z_i-1}^{u,(i)} \leq F_{z_i}^{u,(i)} = 1; \quad (2.3.63)$$

– крайни квантилни индекси:

$$F_1^{Q,(i)} = F_1^{d,(i)} = F_1^{u,(i)} = 0, \quad (2.3.64)$$

$$F_{z_i}^{Q,(i)} = F_{z_i}^{d,(i)} = F_{z_i}^{u,(i)} = 1; \quad (2.3.65)$$

Търси се:

– вътрешни квантилни индекси:  $F_l^{Q,(i)}$ , за  $l=2, 3, \dots, z_i-1$ , такива, че

$$F_2^{Q,(i)} \leq F_3^{Q,(i)} \leq \dots \leq F_{z_i-2}^{Q,(i)} \leq F_{z_i-1}^{Q,(i)}, \quad (2.3.66)$$

$$F_l^{d,(i)} \leq F_l^{Q,(i)} \leq F_l^{u,(i)}. \quad (2.3.67)$$

Задача 2.3.3 е решена при използване на критериите на Лаплас (т. 2.3.2.3.1), Валд (т. 2.3.2.3.2), максимаксен критерий (т. 2.3.2.3.3) и критерий Хурвица (т. 2.3.2.3.4) при пълна несигурност.

Многомерна GL-I с многомерна лентова CDF ще се нарича размито-рационална:

$$g_i^{fr} = \langle F_i^R(\bar{\mathbf{x}}); \bar{\mathbf{x}} \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.81)$$

Тук,  $F_i^R(\cdot)$  е многомерна лентова CDF с долна и горна гранични функции –  $F_i^d(\cdot)$  и  $F_i^u(\cdot)$ .

Многомерните размито-рационални GL-I могат да се ранжират на два етапа:

1) Чрез избрано  $Q$ , всяка  $F_i^R(\cdot)$  се апроксимира с многомерна класическа CDF –  $F_i^Q(\cdot)$ :

$$F_i^d(\bar{\mathbf{x}}) \leq F_i^Q(\bar{\mathbf{x}}) \leq F_i^u(\bar{\mathbf{x}}), \text{ за } \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.3.82)$$

По този начин всяка дадена многомерна размито-рационална GL-I се апроксимира чрез многомерна класическо-рискова GL-I, която ще се нарича Q-генерализирана (многомерна Q-GL-I):

$$g_i^Q = \langle F_i^Q(\bar{\mathbf{x}}); \bar{\mathbf{x}} \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.83)$$

2) Алтернативите се подреждат по низходящ ред на очакваната полезност на многомерни Q-GL-I:

$$E_i^Q(u/F_i^R) = \iint_{\mathbb{R}^d} \dots \int u(\bar{\mathbf{x}}) \partial^d F_i^Q(\bar{\mathbf{x}}). \quad (2.3.84)$$

В (2.3.84) се използва  $d$ -мерен интеграл на Стилтес. Полученият критерий за ранжиране на многомерни размито-рационални GL-I ще се нарича  $Q$ -очаквана полезност.

Разглеждат се частни случаи на ранжиране на многомерни размито-рационални GL-I при лентова VICDF с MUVI предпочитания (т. 2.3.3.5), при лентова SICDF и MUSI предпочитания (т.2.3.3.5), при лентова VICDF с MAVI предпочитания (т. 2.3.3.6) и при лентова SICDF и MASI предпочитания (т. 2.3.3.6).

### 2.3.3. Размито-рационални GL-II

GL-II с едномерна лентова DPF ще се нарича размито-рационална. Нека  $L = \{l_{\bar{\mathbf{c}}}^{fr} \mid \bar{\mathbf{c}} \in C\}$ . Нека  $\theta_{\bar{\mathbf{c}},r}$  да се получи наградата  $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{\mathbf{c}},r}$  от алтернатива  $l_{\bar{\mathbf{c}}}^{fr}$  има вероятност, принадлежаща на затворения интервал  $[P_{\bar{\mathbf{c}}}^d(\theta_{\bar{\mathbf{c}},r}); P_{\bar{\mathbf{c}}}^u(\theta_{\bar{\mathbf{c}},r})]$ . Тогава групата от хипотези  $\theta_{\bar{\mathbf{c}},1}, \theta_{\bar{\mathbf{c}},2}, \dots, \theta_{\bar{\mathbf{c}},r}, \dots, \theta_{\bar{\mathbf{c}},r_{\bar{\mathbf{c}}}}$  е частично вероятностно описана с

едномерна  $f_{d,\bar{c}}^R(\cdot)$ , с долна и горна гранични функции  $P_{\bar{c}}^d(\cdot)$  и  $P_{\bar{c}}^u(\cdot)$ . Тогава алтернативите могат да се представят с размито-рационални GL-II:

$$l_{\bar{c}}^{fr} = \langle \langle \theta_{\bar{c},1}, P_{\bar{c}}^d(\theta_{\bar{c},1}), 1 - P_{\bar{c}}^u(\theta_{\bar{c},1}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},1}; \langle \theta_{\bar{c},2}, P_{\bar{c}}^d(\theta_{\bar{c},2}), 1 - P_{\bar{c}}^u(\theta_{\bar{c},2}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},2}; \dots \dots; \langle \theta_{\bar{c},t_{\bar{c}}}, P_{\bar{c}}^d(\theta_{\bar{c},t_{\bar{c}}}), 1 - P_{\bar{c}}^u(\theta_{\bar{c},t_{\bar{c}}}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},t_{\bar{c}}} \rangle, \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (2.3.106)$$

Ако  $d=1$  и  $z=1$ , то (2.3.106) се нарича едномерна размито-рационална GL-II с едномерен параметър. Ако  $d>1$  и  $z=1$ , то (2.3.106) се нарича многомерна размито-рационална GL-II с едномерен параметър. Ако  $d=1$  и  $z>1$ , то (2.3.106) се нарича едномерна размито-рационална GL-II с многомерен параметър. Ако  $d>1$  и  $z>1$ , то (2.3.106) се нарича многомерна размито-рационална GL-II с многомерен параметър.

Предлага се най-предпочитаната размито-рационална GL-II от  $L$  да се определя на три етапа:

1) Чрез избрано  $Q$ , всяка  $f_{d,\bar{c}}^R(\cdot)$  се апроксимира с класическа DPF –  $f_{d,\bar{c}}^Q(\cdot)$ :

$$P_{\bar{c}}^d(\theta_{\bar{c},r}) \leq f_{d,\bar{c}}^Q(r) = P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},r}) \leq P_{\bar{c}}^u(\theta_{\bar{c},r}), \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (2.3.109)$$

По този начин всяка дадена размито-рационална GL-II се апроксимира чрез класическо-рискова GL-II, която ще се нарича Q-GL-II:

$$l_{\bar{c}}^Q = \langle \langle \theta_{\bar{c},1}, P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},1}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},1}; \langle \theta_{\bar{c},2}, P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},2}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},2}; \dots; \langle \theta_{\bar{c},t_{\bar{c}}}, P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},t_{\bar{c}}}) \rangle, \bar{x}_{\bar{c},t_{\bar{c}}} \rangle, \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (2.3.110)$$

2а) При  $z=1$ , алтернативите могат да се сравняват по предпочитание съгласно:

$$E_{\bar{c}}^Q(u / f_{d,\bar{c}}^R) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{t_{\bar{c}}} P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},r}) u(x_{\bar{c},r}) & , \text{ за } d = 1 \\ \sum_{r=1}^{t_{\bar{c}}} P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},r}) u(\bar{x}_{\bar{c},r}) & , \text{ за } d > 1 \end{cases} \quad (2.3.111)$$

2б) При  $z>1$ , алтернативите могат да се сравняват по предпочитание съгласно:

$$E_{\bar{c}}^Q(u / f_{d,\bar{c}}^R) = \begin{cases} \sum_{r=1}^{t_{\bar{c}}} P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},r}) u(x_{\bar{c},r}) & , \text{ за } d = 1 \\ \sum_{r=1}^{t_{\bar{c}}} P_{\bar{c}}^Q(\theta_{\bar{c},r}) u(\bar{x}_{\bar{c},r}) & , \text{ за } d > 1 \end{cases} \quad (2.3.112)$$

3а) При  $z=1$ , най-предпочитаната размито-рационална GL-II с едномерен параметър,  $l_{c_{opt}}^{fr}$ , се намира от едномерната оптимизационна задача:

$$c_{opt} = ? \text{ така, че } E_{c_{opt}}^Q(u / f_{d,c_{opt}}^R) \geq E_c^Q(u / f_{d,c}^R), \text{ за } c \in C. \quad (2.3.113)$$

3б) При  $z>1$  най-предпочитаната размито-рационална GL-II с многомерен параметър,  $l_{\bar{c}_{opt}}^{fr}$  се намира от  $z$ -мерната оптимизационна задача:

$$\bar{c}_{opt} = ? \text{ така, че } E_{\bar{c}_{opt}}^Q(u / f_{d,\bar{c}_{opt}}^R) \geq E_{\bar{c}}^Q(u / f_{d,\bar{c}}^R), \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (2.3.114)$$

Полученият критерий за ранжиране на размито-рационални GL-II ще се нарича  $Q$ -очаквана полезност.

### 2.3.4. Размито-рационални GL-III

GL-III с лентова CDF ще се нарича размито-рационална. Нека  $L = \{ g_{\bar{c}}^{fr} \mid \bar{c} \in C \}$ , където:

$$g_{\bar{c}}^{fr} = \langle F_{\bar{c}}^R(\bar{\mathbf{x}}); \bar{\mathbf{x}} \rangle, \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (\text{П7.1})$$

Тук,  $F_{\bar{c}}^R(\cdot)$  е многомерна лентова CDF с долна и горна гранични функции  $F_{\bar{c}}^d(\cdot)$  и  $F_{\bar{c}}^u(\cdot)$ .

Ако  $d=1$  и  $z=1$ , то (П7.1) се нарича едномерна размито-рационална GL-III с едномерен параметър. Ако  $d>1$  и  $z=1$ , то (П7.1) се нарича многомерна размито-рационална GL-III с едномерен параметър. Ако  $d=1$  и  $z>1$ , то (П7.1) се нарича едномерна размито-рационална GL-III с многомерен параметър. Ако  $d>1$  и  $z>1$ , то (П7.1) се нарича многомерна размито-рационална GL-III с многомерен параметър.

Най-предпочитаната размито-рационална GL-III от  $L$  може да се определи на три етапа:

1а) При  $d=1$ , чрез избрано  $Q$ , всяка  $F_{\bar{c}}^R(\cdot)$  се апроксимира с едномерна класическа CDF  $F_{\bar{c}}^Q(\cdot)$ :

$$F_{\bar{c}}^d(x) \leq F_{\bar{c}}^Q(x) \leq F_{\bar{c}}^u(x), \text{ за } x \in (-\infty; +\infty). \quad (\text{П7.2})$$

По този начин всяка дадена едномерна размито-рационална GL-III се апроксимира чрез едномерна класическо-рискова GL-III, която ще се нарича  $Q$ -генерализирана (едномерна Q-GL-III):

$$g_{\bar{c}}^Q = \langle F_{\bar{c}}^Q(x); x \rangle, \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (\text{П7.3})$$

1b) При  $d>1$ , чрез избран критерий при пълна несигурност  $Q$ , всяка многомерна лентова CDF –  $F_{\bar{c}}^R(\cdot)$  се апроксимира с многомерна класическа CDF  $F_{\bar{c}}^Q(\cdot)$ , отговаряща на условието:

$$F_{\bar{c}}^d(\bar{\mathbf{x}}) \leq F_{\bar{c}}^Q(\bar{\mathbf{x}}) \leq F_{\bar{c}}^u(\bar{\mathbf{x}}), \text{ за } \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d. \quad (\text{П7.4})$$

По този начин всяка дадена многомерна размито-рационална GL-III се апроксимира чрез многомерна класическо-рискова GL-III, която ще се нарича  $Q$ -генерализирана (многомерна Q-GL-III):

$$g_{\bar{c}}^Q = \langle F_{\bar{c}}^Q(\bar{\mathbf{x}}); \bar{\mathbf{x}} \rangle, \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (\text{П7.5})$$

2а) При  $z=1$ , алтернативите могат да се сравняват по предпочитание съгласно:

$$E_{\bar{c}}^Q(u/F_{\bar{c}}^R) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dF_{\bar{c}}^Q(x) & , \text{ за } d = 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^d} \dots \int u(\bar{\mathbf{x}}) \partial^d F_{\bar{c}}^Q(\bar{\mathbf{x}}) & , \text{ за } d > 1 \end{cases} \quad (\text{П7.6})$$

2b) При  $z>1$  алтернативите могат да се сравняват по предпочитание според големината на очакваните полезности на Q-GL-III с многомерен параметър:

$$E_{\bar{c}}^Q(u/F_{\bar{c}}^R) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dF_{\bar{c}}^Q(x) & , \text{ за } d = 1 \\ \iint_{\mathbb{R}^d} \dots \int u(\bar{\mathbf{x}}) \partial^d F_{\bar{c}}^Q(\bar{\mathbf{x}}) & , \text{ за } d > 1 \end{cases} \quad (\text{П7.7})$$

3а) При  $z=1$ , най-предпочитаната размито-рационална GL-III с едномерен параметър,  $g_{c_{opt}}^{fr}$ , се намира от едномерната оптимизационна задача:

$$c_{opt} = ? \text{ така, че } E_{c_{opt}}^Q(u/F_{c_{opt}}^R) \geq E_c^Q(u/F_c^R), \text{ за } c \in C. \quad (\text{П7.8})$$

3b) При  $z>1$  най-предпочитаната размито-рационална GL-III с многомерен параметър,  $g_{\bar{c}_{opt}}^{fr}$ , се намира от  $z$ -мерната оптимизационна задача:

$$\bar{c}_{\text{opt}}=? \text{ така, че } E_{\bar{c}_{\text{opt}}}^Q(u/F_{\bar{c}_{\text{opt}}}^R) \geq E_{\bar{c}}^Q(u/F_{\bar{c}}^R), \text{ за } \bar{c} \in C. \quad (\text{П7.9})$$

Полученият критерий за ранжиране на размито-рационални GL-III ще се нарича  $Q$ -очаквана полезност.

### 2.3.5. Размито-рационални SGL-I

Нека  $L$  съдържа  $q$  на брой SGL-I, където  $\theta_{i,r}$  е събитието  $X^d = \bar{x}_{i,r}^d$ , като неговата вероятност  $P(\theta_{i,r}) \in [P_{i,r}^d; P_{i,r}^u]$ . Тогава групите от хипотези  $\theta_{i,1}, \theta_{i,2}, \dots, \theta_{i,r}, \dots, \theta_{i,t_i}$  ще са частично описани вероятностно с лентови DPF –  $f_{d,i}^R(\cdot)$  с долна и горна гранични функции  $P_i^d(\cdot)$  и  $P_i^u(\cdot)$ . Тогава алтернативите могат да се представят като един път съставни размито-рационални OL:

$$L_i^{fr} = \langle \langle \theta_{i,1}, P_{i,1}^d, 1 - P_{i,1}^u \rangle, g_{i,1}^{fr}; \langle \theta_{i,2}, P_{i,2}^d, 1 - P_{i,2}^u \rangle, g_{i,2}^{fr}; \dots; \langle \theta_{i,t_i}, P_{i,t_i}^d, 1 - P_{i,t_i}^u \rangle, g_{i,t_i}^{fr} \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.118)$$

Директните изходи на  $L_i^{fr}$  са  $d^c$ -мерни размито-рационални GL-I:

$$g_{i,r}^{fr} = \langle F_{i,r}^R(\bar{x}^c / \theta_{i,r}); (\bar{x}^c, \bar{x}_{i,r}^d) \rangle, \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i. \quad (2.3.119)$$

Тъй като в  $g_{i,r}^{fr}$  дискретният базов векторен атрибут винаги заема стойност  $\bar{x}_{i,r}^d$ , то: а) конкретната реализация на  $X^d$  се избира още с определянето на директния изход на един път съставната размито-рационална OL –  $L_i^{fr}$ ; б) размито-рационалните GL-I –  $g_{i,r}^{fr}$  по същество определят само конкретната реализация  $\bar{x}^c$  на непрекъснатия базов векторен атрибут  $X^c$ .

Размито-рационалните SGL-I могат да се ранжират на четири етапа:

1) Чрез избрано  $Q$ , всяка условна  $d^c$ -мерна лентова CDF –  $F_{i,r}^R(\cdot / \theta_{i,r})$  се апроксимира с условна  $d^c$ -мерна класическа CDF –  $F_{i,r}^Q(\cdot / \theta_{i,r})$ :

$$F_{i,r}^d(\bar{x}^c) \leq F_{i,r}^Q(\bar{x}^c / \theta_{i,r}) \leq F_{i,r}^u(\bar{x}^c), \text{ за } \bar{x}^c \in \mathbb{R}^{d^c}. \quad (2.3.120)$$

По този начин, всяка  $d^c$ -мерна  $g_{i,r}^{fr}$  се апроксимира чрез  $d^c$ -мерна Q-GL-I:

$$g_{i,r}^Q = \langle F_{i,r}^Q(\bar{x}^c / \theta_{i,r}); (\bar{x}^c, \bar{x}_{i,r}^d) \rangle, \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \text{ за } i=1, 2, \dots, q; \quad (2.3.121)$$

2)  $Q$ -очакваната полезност на всяка  $g_{i,r}^{fr}$  се изчислява като очакваната полезност на апроксимиращата я  $d^c$ -мерна Q-GL-I –  $g_{i,r}^Q$ :

$$E_{i,r}^Q(u/F_{i,r}^R) = \iint_{\mathbb{R}^{d^c}} \dots \int u(\bar{x}^c, \bar{x}_{i,r}^d) \partial^{d^c} F_{i,r}^Q(\bar{x}^c / \theta_{i,r}), \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i, \text{ за } i=1, 2, \dots, q. \quad (2.3.122)$$

3) Чрез избраното  $Q$ , всяка  $f_{d,i}^R(\cdot)$ , се апроксимира с класическа DPF –  $f_{d,i}^Q(\cdot)$ :

$$P_{i,r}^d \leq f_{d,i}^Q(r) = P_i^Q(\theta_{i,r}) \leq P_{i,r}^u, \text{ за } r=1, 2, \dots, t_i. \quad (2.3.123)$$

По този начин всяка дадена размито-рационална SGL-I –  $L_i^{fr}$  се апроксимира чрез класическо-рискова SGL-I –  $L_i^Q$ , с директни изходи  $d^c$ -мерните Q-GL-I –  $g_{i,r}^Q$ :

$$L_i^Q = \langle \langle \theta_{i,1}, P_i^Q(\theta_{i,1}) \rangle, g_{i,1}^Q; \langle \theta_{i,2}, P_i^Q(\theta_{i,2}) \rangle, g_{i,2}^Q; \dots; \langle \theta_{i,t_i}, P_i^Q(\theta_{i,t_i}) \rangle, g_{i,t_i}^Q \rangle, \text{ за } i=1, 2, \dots, q; \quad (2.3.124)$$

Последната лотария ще се нарича Q-SGL-I;

4) Алтернативите се подреждат по низходящ ред на очакваните полезности на Q-SGL-I –  $L_i^Q$  :

$$E_i^Q(u/p) = \sum_{r=1}^{i_i} P_i^Q(\theta_{i,r}) E_{i,r}^Q(u/F_{i,r}^R). \quad (2.3.125)$$

Полученият критерий за ранжиране на размито-рационални SGL-I ще се нарича Q-очаквана полезност. Разглеждат се частни случаи на размито-рационални SGL-I при MUVI предпочитания (т. 2.3.5.2), с лентови VICDF при MUVI предпочитания (т. 2.3.5.3), с една дискретна векторна стойност при MUVI предпочитания (т. 2.3.5.4), при MAVI предпочитания (т. 2.3.5.5), с лентови VICDF при MAVI предпочитания (т. 2.3.5.6) и с една дискретна векторна стойност при MAVI предпочитания (т. 2.3.5.7).

## ГЛАВА 3. Числени експерименти с размито-рационални решения

### 3.1. Разработен софтуер

За реализиране на представените в глава 2 методи, техники и алгоритми е разработен програмен пакет в среда на MATLAB 7.0.0 R14, включващ 18 програмни функции с текст, даден в Приложение 8.

### 3.2. Експериментално изследване на arctg-апроксимация

През периода октомври 2005 – февруари 2007 е проведен емпиричен експеримент, в който 104 доброволци са построили функцията си на полезност върху монетарни награди в интервала [-10000 лв; 30000 лв] при използване на методите на сигурния еквивалент CE и на несигурния еквивалент UE (при  $p=2/3$ ) и на LE (при  $p=1/2$ ). Участниците в експеримента са студенти в бакалавърски и магистърски курс по индустриален мениджмънт и бизнес администрация към Технически университет-Варна, подробно запознати с количествените техники за анализ на решения. При използване на CE и UE са оценени по 9 полезностни квантили с индекси 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 и 0.9. При LE са оценени полезностите на 6000 лв., -2000 лв., 2000 лв., 6000 лв., 10000 лв., 14000 лв., 18000 лв., 22000 лв. и 26000 лв. Оценките за всеки BP са получени в по една сесия от по 2 часа за всеки от трите метода, с разлика от минимум 48 часа между сериите. При всеки BP реда на методите и реда на квантилите/квантилните индекси е случайно избран с цел да се избегне ефекта на закотвяне и корекция. В табл. 3.2.1 са представени данните за BP №84.

Табл. 3.2.1. Интервали на неопределеност на квантили и квантилни индекси на вътрешни възли от функциите на полезност в интервала [-10000 лв.; 30000 лв.] на BP №84, оценени по CE, UE и LE. В сиво са показани възлите, които не са оценявани от BP

		1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	$u_l$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
CE	$\hat{x}_{u_l}^d$	-10000	-7700	-6100	-5800	-4400	-2400	3000	3800	6300	8000	30000	
	$\hat{x}_{u_l}^u$	-10000	-6100	-4500	-4000	-2000	4000	5400	6000	8300	10200	30000	
UE	$\hat{x}_{u_l}^d$	-10000	-6400	-2000	-1600	-400	1000	2700	4400	6500	9900	30000	
	$\hat{x}_{u_l}^u$	-10000	-4000	4000	6000	2400	3800	5100	7200	8900	12100	30000	
	$x_l$	-10000	-6000	-2000	2000	6000	10000	14000	18000	22000	26000	30000	
LE	$\hat{u}_l^d$	0	0.03	0.12	0.16	0.40	0.63	0.72	0.85	0.89	0.92	1	
	$\hat{u}_l^u$	0	0.09	0.20	0.28	0.56	0.81	0.88	0.95	0.97	0.98	1	

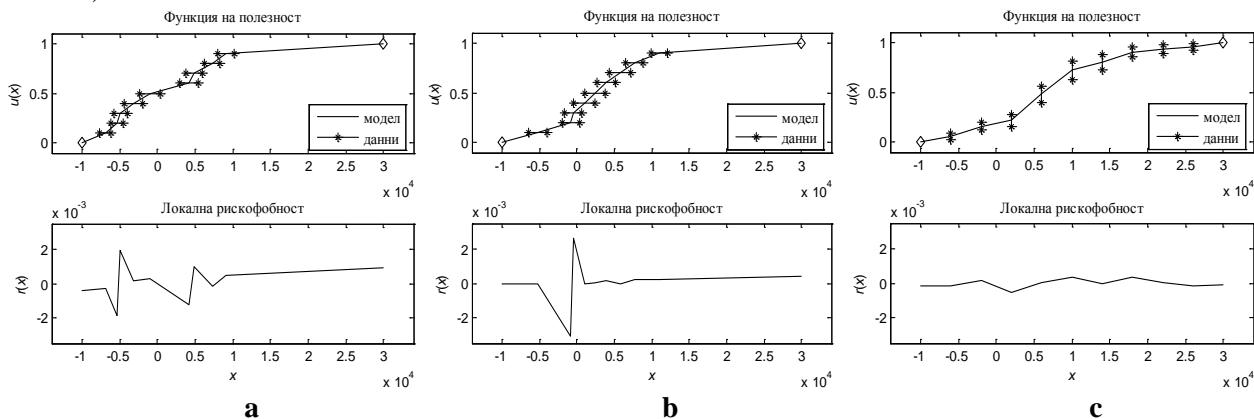
Ще се сравняват три форми на полезностна функция: а) arctg-апроксимация; б) линейна интерполация; в) степенна апроксимация:  $u(x) = [(x - x_d + x_0)^a - x_0^a] / [(x_u - x_d + x_0)^a - x_0^a]$ .

За анализ на статистическата значимост в наблюдаваното преимущество на една апроксимацията пред друга се използват четири едностранни статистически теста за свързани извадки, където  $\Delta$  е случайна величина с реализации – съответните разлики между извадката с по-големи стойности и извадката с по-малки стойности: 1) Бутстрап тест за средни (Bootstrap mean test) за установяване дали очакваната стойност на разликата от двете извадки  $\Delta$  е нула; 2) Бутстрап тест за медиани (Bootstrap median test) за установяване

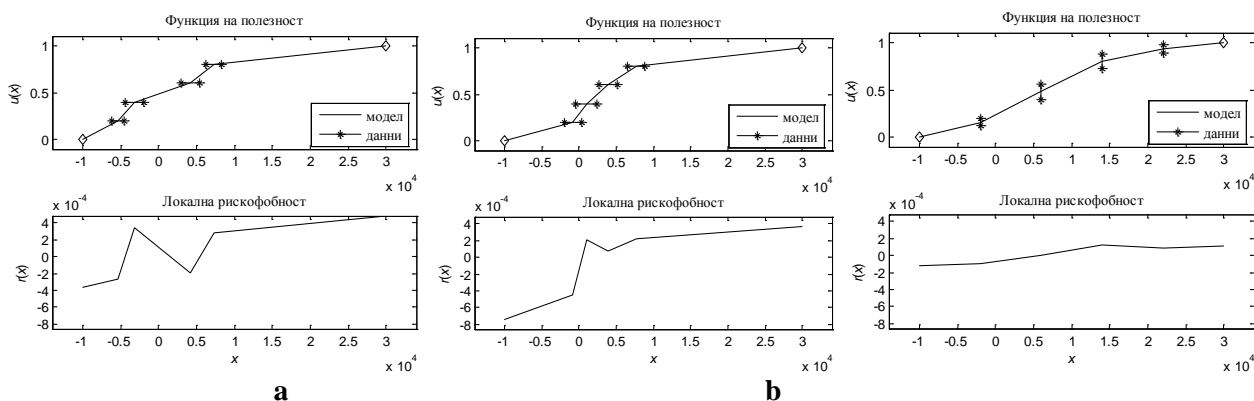
дали медианата на разликата от двете извадки  $\Delta$  е нула; 3) Знаков тест (sign test) за установяване дали медианата на разликата от двете извадки  $\Delta$  е нула; 4) Тест на знаковия ранк (Signrank test) за установяване дали медианата на разликата от двете извадки  $\Delta$  е нула.

Въз основа на емпиричните данни са мотивирани и доказани следните работни хипотези:

- 1)  $\arctg$ -апроксимацията позволява по-адекватно построяване на едномерна полезност при монотонни предпочитания, отколкото линейната интерполация, тъй като по-добре оценява локалната рискофобност;
- 2)



Фиг. 3.2.1. а) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по СЕ по 9 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу); б) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по UE по 9 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу); в) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по LE по 9 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу). Интервалите на неопределеност на оценените точки са показани с хоризонтални/вертикални отсечки.



Фиг. 3.2.2. а) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по СЕ по 4 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу); б) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по UE по 4 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу); в) линейно интерполирана функция на полезност за ВР №84 по LE по 4 точки (горе) и линейно интерполирана локална рискофобност (долу). Интервалите на неопределеност на оценените точки са показани с хоризонтални/вертикални отсечки.

2)  $\arctg$ -апроксимацията по-добре описва оценените данни от степенната апроксимация, тъй като гъвкаво отразява конкретното отношение към риска на ВР в зависимост от интервала на наградите;

3) пет вътрешни възли са достатъчни за получаване на задоволителна  $\arctg$ -апроксимация на едномерна полезност при монотонни предпочитания;

4) при редуцирани извадки, съдържащи 3, 4 или 5 вътрешни възела,  $\arctg$ -апроксимацията и линейната интерполация имат на практика еднакви мерки за съгласуване на модела и данните, като локалната рискофобност при линейната интерполация не се оценява изключително грубо, за разлика от  $\arctg$ -апроксимацията, където на практика не се променя в сравнение с пълната извадка.



Табл. 3.2.2. Сравнение на степенна и arctg-апроксимация при извадки  $CE_{9,j}$ ,  $UE_{9,j}$  и  $LE_{9,j}$ , за  $j=1,2,\dots, 104$  (вж. легендата под таблицата)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$m$	2.1	16	14	2.4	9.4	7.0	0.88	2.2	1.4
$\sigma$	1.98	18.4	18	1.92	13.2	13.1	1.01	2.48	2.45
$x_{0.5}$	1.6	11	8.9	2.0	4.7	1.6	0.55	1.2	0.44
$x_{0.75}-x_{0.25}$	1.84	19.5	20.1	2.67	10.5	9.91	0.871	2.14	1.64

Легенда към табл. 3.2.2.

В четирите реда на табл. 3.2.2 са дадени съответно средната стойност, стандартното отклонение, медианата и интерквартилният интервал на множествата данни за съответната колона:

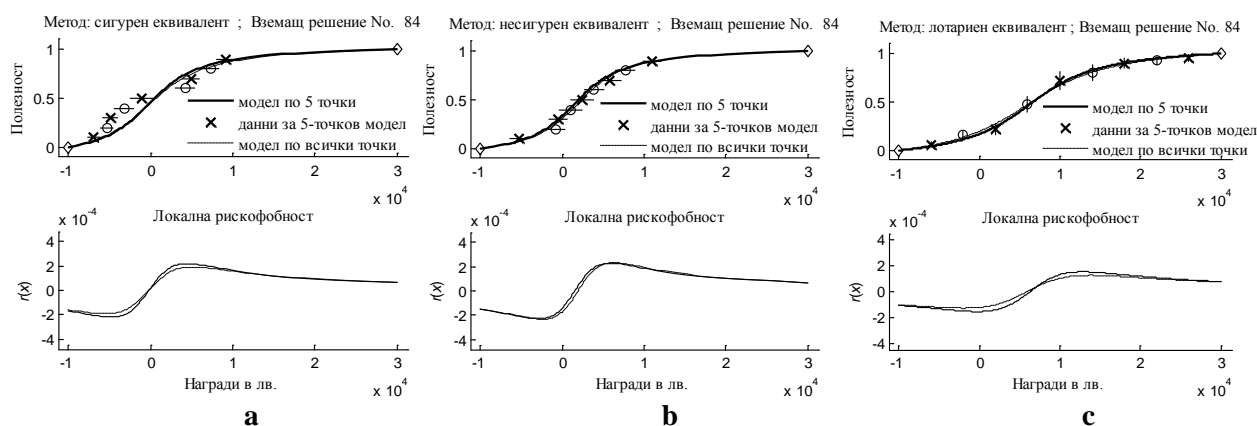
1 –  $\{\chi_x^2(CE_{9,j}, CE_{9,j}, arc)/j=1,2,\dots,104\}$ ; 2 –  $\{\chi_x^2(CE_{9,j}, CE_{9,j}, pow)/j=1,2,\dots,104\}$ ;

3 –  $\{\Delta_{abs,pow}^{CE_{9,j}}/j=1,2,\dots,104\}$ ; 4 –  $\{\chi_x^2(UE_{9,j}, UE_{9,j}, arc)/j=1,2,\dots,104\}$ ;

5 –  $\{\chi_x^2(UE_{9,j}, UE_{9,j}, pow)/j=1,2,\dots,104\}$ ; 6 –  $\{\Delta_{abs,pow}^{UE_{9,j}}/j=1,2,\dots,104\}$ ;

7 –  $\{\chi_u^2(LE_{9,j}, LE_{9,j}, arc)/j=1,2,\dots,104\}$ ; 8 –  $\{\chi_u^2(LE_{9,j}, LE_{9,j}, pow)/j=1,2,\dots,104\}$ ;

9 –  $\{\Delta_{abs,pow}^{LE_{9,j}}/j=1,2,\dots,104\}$ ;



Фиг. 3.2.7. а) arctg-апроксимация на функцията на полезност (горе) и локална рискофобност (долу) за ВР №84 по CE по 5 и по 9 вътрешни точки; б) arctg-апроксимация на функцията на полезност (горе) и локална рискофобност (долу) за ВР №84 по UE по 5 и по 9 вътрешни точки; в) arctg-апроксимация на функцията на полезност (горе) и локална рискофобност (долу) за ВР №84 по LE по 5 и по 9 вътрешни точки. Интервалите на неопределеност на оценените точки са показани с хоризонтални/вертикални отсечки.

Табл. 3.2.10. Стойности на  $p_{value}$  на четирите статистически теста за статистическата значимост на преимуществото на arctg-апроксимацията пред линейната интерполация по редуцирани възли

	CE	UE	LE	CE	UE	LE	CE	UE	LE
	по 3 възела			по 4 възела			по 5 възела		
$p_{value,1}$	0	3.86e-2	2.50e-5	0	1.28e-1	0	0	0	0
$p_{value,2}$	0	2.22e-2	0	6.00e-5	5.50e-4	0	0	0	0
$p_{value,3}$	6.56e-5	1.40e-1	1.43e-4	1.21e-2	1.97e-2	4.09e-13	4.72e-15	3.78e-20	3.88e-17
$p_{value,4}$	2.61e-6	1.71e-1	2.53e-6	8.89e-5	2.40e-2	4.47e-15	1.30e-15	7.41e-18	1.16e-16

### 3.2.6. Примери с намаляващи предпочитания

#### ПРИМЕР 3.2.1. СРЕДНО ГОДИШНО NPV ЗА ОТОПЛЕНИЕ

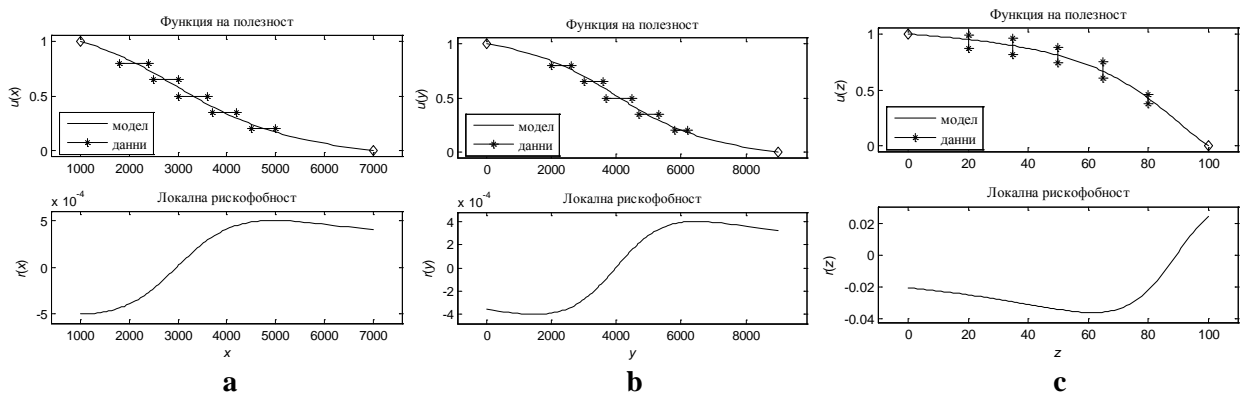
Разглежда се едномерната непрекъсната случайна величина  $X$ , представляваща средно годишни дисконтирани разходи в лева за отопление на домакинство. ВР има строго намаляващи предпочитания в интервала  $[1000; 7000]$ . На фиг. 3.2.11а е дадена arctg-апроксимираната едномерна функция на полезност по

**ПРИМЕР 3.2.2. РАЗМЕР НА ИНВЕСТИЦИЯ В ДОМАШНА ОТОПЛИТЕЛНА СИСТЕМА**

Разглежда се едномерната непрекъсната случайна величина  $Y$ , представляваща размера на инвестицията в лева за домашна отоплителна система. ВР има строго намаляващи предпочитания в интервала  $[0; 9000]$ . На фиг. 3.2.11b е дадена  $\arctg$ -апроксимираната едномерна функция на полезност по 5 вътрешни индекси на полезностни квантили, оценени по UE

**ПРИМЕР 3.2.3. ВРЕМЕ ЗА ИНСТАЛАЦИЯ НА ДОМАШНА ОТОПЛИТЕЛНА СИСТЕМА**

Разглежда се едномерната дискретна случайна величина  $Z$ , представляваща времето в дни за инсталация на домашна отоплителна система. За ВР са от значение стойностите 0, 3, 40, 50, 75 и 100. ВР има строго намаляващи предпочитания върху стойностите на  $Z$ , последната е разгледана като непрекъсната случайна величина в интервала  $[0; 100]$ . На фиг. 3.2.11c е дадена  $\arctg$ -апроксимираната едномерна функция на полезност по 5 вътрешни индекси на полезностни квантили оценени по LE



Фиг. 3.2.11. а)  $\arctg$ -апроксимирани полезности за Пример 3.2.1; б)  $\arctg$ -апроксимирани полезности за Пример 3.2.2; в)  $\arctg$ -апроксимирани полезности за Пример 3.2.3

**3.3. Примери за построяване на немонотонни едномерни полезности**

Създадени са два модела, емулиращи псевдо-едноекстремални предпочитания на конкретен размито-рационален ВР. Първият модел симулира предпочитанията на размито-рационален ВР върху телесното му тегло в интервала от 60 kg до 130 kg. Получени са данните от табл. 3.3.1 и е построена функция на полезност, показана на фиг. 3.3.1.

Табл. 3.3.1а. Стойности на квантили и квантилни индекси за лявата локална функция на полезност и тяхното рескалиране в глобална полезност, оценени от симулирания размито-рационален ВР с хълмови предпочитания върху неговото телесно тегло

$i$	$u_{1,i}$	$\hat{x}_{1,u_i}^d$	$\hat{x}_{1,u_i}^u$	$\hat{x}_{1,u_i} \equiv \hat{x}_i$	$u_i^d$	$u_i^u$	$u_i$
1	0	60	60	60	<b>0.26</b>	<b>0.28</b>	0.27
2	0.25	68	69	68.5	0.445	0.46	0.4525
3	0.5	74	77	75.5	0.63	0.64	0.635
4	0.75	80	81	80.5	0.815	0.82	0.8175
5	1	83	85	85	1	1	1

Другият модел симулира предпочитанията на криминален елемент върху сумата незаконно присвоени финансови средства в интервала между \$0 и \$2000000, при положение, че срещу първия впоследствие се повдига криминално обвинение. Получени са данни от табл. 3.3.2 и е построена показаната функция на полезност на фиг. 3.3.2.

Табл. 3.3.1b. Стойности на квантили и квантилни индекси за дясната локална функция на полезност и тяхното рескалиране в глобална полезност, оценена от симулиран размито-рационален ВР с хълмови предпочитания върху неговото телесно тегло

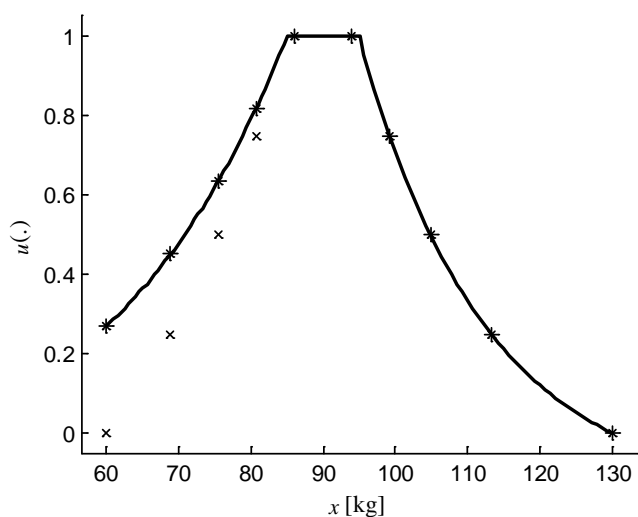
$i$	$u_{2,i}$	$\hat{x}_{2,u_i}^d$	$\hat{x}_{2,u_i}^u$	$\hat{x}_{2,u_i} \equiv \hat{x}_i$	$u_i^d$	$u_i^u$	$u_i$
6	1	95	97	95	1	1	1
7	0.75	99	100	99.5	0.75	0.75	0.75
8	0.5	103	106	104.5	0.5	0.5	0.5
9	0.25	113	114	113.5	0.25	0.25	0.25
10	0	130	130	130	0	0	0

Табл. 3.3.2a. Стойности на квантили и квантилни индекси за лявата локална функция на полезност и тяхното рескалиране в глобална полезност, оценени от симулирания размито-рационален ВР с долинни предпочитания върху суми присвоени финансови средства

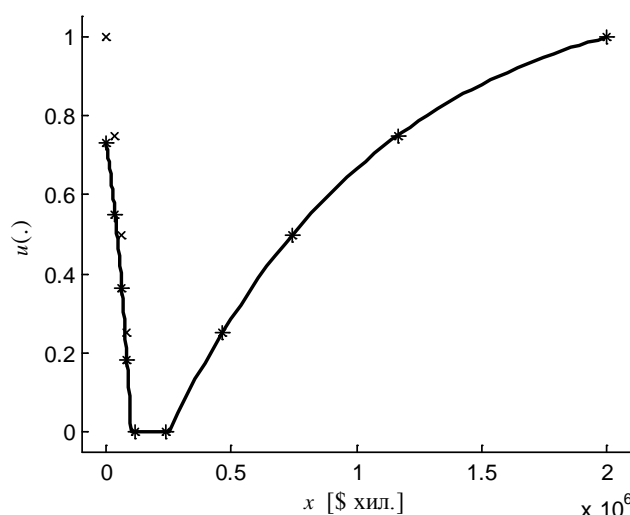
$i$	$u_{1,i}$	$\hat{x}_{1,u_i}^d$	$\hat{x}_{1,u_i}^u$	$\hat{x}_{1,u_i} \equiv \hat{x}_i$	$u_i^d$	$u_i^u$	$u_i$
1	1	0	0	0	0.72	0.74	0.73
2	0.75	35	36	35.5	0.54	0.555	0.5475
3	0.5	61	63	62	0.36	0.38	0.37
4	0.25	82	83	82.5	0.18	0.185	0.1825
5	0	98	105	105	0	0	0

Табл. 3.3.2b. Стойности на квантили и квантилни индекси за дясната локална функция на полезност и тяхното рескалиране в глобална полезност, оценени от симулирания размито-рационален ВР с долинни предпочитания върху суми присвоени финансови средства

$i$	$u_{2,i}$	$\hat{x}_{2,u_i}^d$	$\hat{x}_{2,u_i}^u$	$\hat{x}_{2,u_i} \equiv \hat{x}_i$	$u_i^d$	$u_i^u$	$u_i$
6	0	249	257	249	0	0	0
7	0.25	462	464	463	0.25	0.25	0.25
8	0.5	744	747	745.5	0.5	0.5	0.5
9	0.75	1164	1165	1164.5	0.75	0.75	0.75
10	1	2000	2000	2000	1	1	1



Фиг. 3.3.1. Симулирана хълмова функция на полезност на размито-рационален ВР върху неговото телесно тегло (непрекъсната линия). Оценените възли са показани със звездички. Възлите за лявата локална функция на полезност са показани с кръстчета. Интервалът на екстремума е от 85 kg до 95 kg



Фиг. 3.3.2. Симулирана долинна функция на полезност на размито-рационален ВР върху суми присвоени финансови средства (непрекъсната линия). Оценените възли са показани със звездички. Възлите за лявата локална функция на полезност са показани с кръстчета. Интервалът на екстремума е от \$100000 до \$250000

### 3.4. Пример за построяване на многомерна полезност

**ПРИМЕР 3.4.1.** Нека на двама ВР ( $ВР^1$  и  $ВР^2$ ) се налага поотделно да ранжират алтернативи, чиито последствия са многомерни вектори с  $d=7$  атрибута  $\bar{x}=(x_1, x_2, \dots, x_7)$ , като и двамата са установили взаимна полезностна независимост между  $n=5$  групи базови векторни атрибути:  $\bar{y}_1=(x_1, x_3)$ ,  $\bar{y}_2=(x_4)$ ,  $\bar{y}_3=(x_2, x_5)$ ,  $\bar{y}_4=(x_7)$ ,  $\bar{y}_5=(x_6)$ .  $ВР^1$  и  $ВР^2$  са построили субективно по 5 базови функции на полезност върху всеки от базовите векторни атрибути съответно  $u_j^{(1)}(\bar{y}_j)$  и  $u_j^{(2)}(\bar{y}_j)$ , за  $j=1,2,\dots,5$ .  $ВР^1$  и  $ВР^2$  са оценили интервалите на неопределеност на всяка константа както следва:

$$ВР^1: k_{y,1}^{(1)} \in [0.12; 0.23], k_{y,2}^{(1)} \in [0.13; 0.22], k_{y,3}^{(1)} \in [0.15; 0.22], k_{y,4}^{(1)} \in [0.15; 0.21], k_{y,5}^{(1)} \in [0.16; 0.21];$$

$$ВР^2: k_{y,1}^{(2)} \in [0.01; 0.35], k_{y,2}^{(2)} \in [0.13; 0.14], k_{y,3}^{(2)} \in [0.19; 0.20], k_{y,4}^{(2)} \in [0.19; 0.20], k_{y,5}^{(2)} \in [0.19; 0.20].$$

Необходимо е да се намерят функциите на полезност на двамата ВР при избрано ниво на значимост  $\alpha=0.1$ . И при двамата ВР,  $m=n=5>0$ ,  $a_5=0.71<1$ ,  $b_5=1.09>1$ , т.е. случаят е нетривиален. Чрез числената реализация на равномерния метод е установено, че видът на функциите на полезност на двамата ВР е различен:

$$u^{(1)}(\bar{x}) = \frac{\left\{ \left[ 0.0512u_1^{(1)}(\bar{y}_1) + 1 \right] \left[ 0.0512u_2^{(1)}(\bar{y}_2) + 1 \right] \times \right.}{0.2928} \left. \times \left[ 0.0542u_3^{(1)}(\bar{y}_3) + 1 \right] \left[ 0.0527u_4^{(1)}(\bar{y}_4) + 1 \right] \left[ 0.0542u_5^{(1)}(\bar{y}_5) + 1 \right] \right\} - 3.4153 =$$

$$= \frac{\left\{ \left[ 0.0512u_1^{(1)}(x_1, x_3) + 1 \right] \left[ 0.0512u_2^{(1)}(x_4) + 1 \right] \times \right.}{0.2928} \left. \times \left[ 0.0542u_3^{(1)}(x_2, x_5) + 1 \right] \left[ 0.0527u_4^{(1)}(x_7) + 1 \right] \left[ 0.0542u_5^{(1)}(x_6) + 1 \right] \right\} - 3.4153 \quad (3.4.3)$$

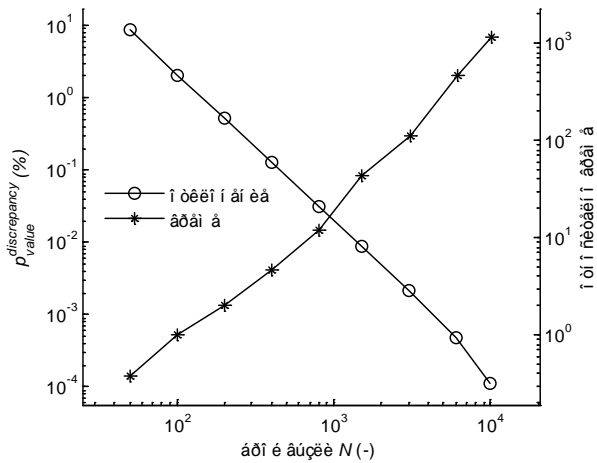
$$u^{(2)}(\bar{x}) = 0.2695 u_1^{(2)}(\bar{y}_1) + 0.1376 u_2^{(2)}(\bar{y}_2) + 0.1976 u_3^{(2)}(\bar{y}_3) + 0.1976 u_4^{(2)}(\bar{y}_4) + 0.1976 u_5^{(2)}(\bar{y}_5) =$$

$$= 0.2695 u_1^{(2)}(x_1, x_3) + 0.1376 u_2^{(2)}(x_4) + 0.1976 u_3^{(2)}(x_2, x_5) + 0.1976 u_4^{(2)}(x_7) + 0.1976 u_5^{(2)}(x_6). \quad (3.4.7)$$

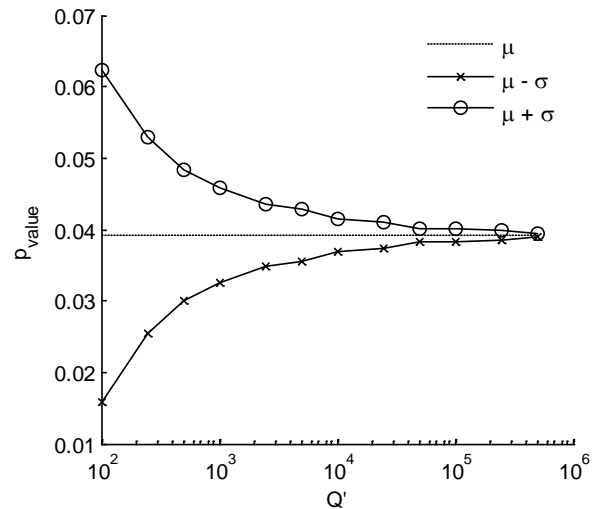
Различни функции на полезност ще се получават за всички стойности на  $\alpha \in [0.05; 0.41]$ . Този факт демонстрира преимуществата на равномерния метод спрямо наивния метод от т. 2.1.3.2.5, който отчита само големината на  $s$  при избор на вида на функцията на полезност. Използването на последния неправилно ще наложи и на двамата еднакви функции на полезност.

Постигането на висока точност в оценките на  $p_{value}$ , чрез повишаване на броя на възлите за апроксимация, води до съществено намаляване на бързодействието на процедурата. За изследване на тези зависимости е проведен числен експеримент, при който  $p_{value}$  е оценено при 10 различни стойности на  $N_3=N_4=N_5=N^0$ . Експериментите са извършени с Pentium 4, 3.06 GHz, 2GB RAM. Относителната грешка и относителното време в зависимост от броя на възлите при първите 9 експеримента са изобразени на фиг. 3.4.2. Грешка под 1% в стойността на  $p_{value}$  е на практика пренебрежимо малка. Затова в този случай добър баланс между бързодействие и точност на процедурата може да се постигне със 100 възела за апроксимиране на плътностите на  $u_3$ ,  $u_4$  и  $u_5$ .

За да се осигури баланса между точност и бързодействие се препоръчва процедурата да се изпълнява многократно с удвояване на броя на възли за апроксимация спрямо предния опит, дотогава докато разликата в оценените стойности на  $p_{value}$  при два последователни опита стане достатъчно малка. Ако преди това да се случи, времето за изпълнение на процедурата стане неприемливо дълго, то разумна алтернатива е използването на симулационната реализация на равномерния метод. Както и при всяка симулационна процедура стои въпросът за оценяване на минималния брой реплики, които да осигурят задоволителна точност на симулационните резултати. С интервално оценените константи от  $ВР^1$  е проведен числов експеримент, при който  $p_{value}$  е оценено по 20 пъти за всяка от 12-те избрани стойности на  $Q'$ .



Фиг. 3.4.2. Зависимости на точността и бързодействието от броя възли при апроксимациите на плътностите на  $u_3$ ,  $u_4$  и  $u_5$



Фиг. 3.4.6. Графични резултати за  $p_{value}$  при 12 стойности на  $Q'$  и 20 експеримента за всяка стойност

Величината  $100\sigma_j / \mu$  (в %) измерва относителната ефективност на симулационната оценка за  $p_{value}$ . Получените резултати са изобразени на фиг. 3.4.6. Вижда се, че в разглеждания случай  $Q'=2500$  е достатъчно, тъй като стандартното отклонение на оценката на  $p_{value}$  е под 10% от истинската му стойност.

### 3.5. Пример за ранжиране на размито-рационални OL

#### ПРИМЕР 3.5.1. ИЗБОР НА МАРКЕТИНГОВА СТРАТЕГИЯ

Представеният пример в настоящата точка е решен с използване на функциите *Laplace\_utility*, *Wald utility*, *Waldn\_utility* и *Hurwicz\_utility* (вж. т. 3.1).

#### А) Постановка

Нека собственикът на малка фирма (BP) се налага да избира между  $q=4$  различни маркетингови стратегии  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_4$ , които могат да доведат до 5 различни годишни печалби  $x_1=\$20\,000$ ,  $x_2=\$18\,000$ ,  $x_3=\$15\,000$ ,  $x_4=\$12\,000$  и  $x_5=\$8000$ . Алтернативите могат да се моделират като OL:

$$l_i = \langle \theta_{i,1}, x_1; \theta_{i,2}, x_2; \theta_{i,3}, x_3; \theta_{i,4}, x_4; \theta_{i,5}, x_5 \rangle, \text{ за } i=1, 2, 3, 4. \quad (3.5.1)$$

Оценените вероятности на хипотезите  $\theta_{i,r}$ , за  $i=1, 2, 3, 4$  и  $r=1, 2, 3, 4, 5$ , са дадени в първите две колони на табл. 3.5.1. Очевидно,  $u(x_1)=u(\$20\,000)=1$ ,  $u(x_5)=u(\$8000)=0$ . BP е оценил полезностите на останалите награди както следва:  $u(x_2)=u(\$18000)=0.9$ ,  $u(x_3)=u(\$15000)=0.7$ ,  $u(x_4)=u(\$12000)=0.4$ . Необходимо е да се ранжират алтернативите (3.5.1) съгласно критериите за очаквана полезност на Лаплас, Валд, Хурвиц<sub>0.25</sub> (ако BP е умерен оптимист), Хурвиц<sub>0.75</sub> (ако BP е умерен песимист) и критерия за максимална очаквана полезност.

#### В) Решение по метода на изоставеното $t$ и метода на нормираните средни

Поставеният проблем е решен чрез метода на изоставеното  $t$  и метода на нормираните средни. Резултиращите вероятности са дадени в колони 3 до 8 на табл. 3.5.1. Вижда се, че и при двата метода алтернативите не могат да бъдат ранжирани.

#### С) Решение по $Q$ -очаквана полезност

В табл. 3.5.5 са дадени стойностите на Валд, Лаплас, максимална и Хурвиц $_{\alpha}$  (за  $\alpha=0.25$  и  $\alpha=0.75$ ) очаквани полезности. Вижда се, че и в четирите случая най-добра се оказва алтернатива  $l_1$ , тъй като е с най-висока очаквана полезност.

### 3.6. Примери за ранжиране на размито-рационални GL-I

#### ПРИМЕР 3.6.1. АПРОКСИМИРАНЕ НА X-ЛЕНТОВА CDF ПРИ НЕМОНОТОННИ ПОЛЕЗНОСТИ

Дадена е едномерната случайна величина  $X$ , която заема стойности в интервала  $[30; 42]$ . Върху

стойностите на  $X$  е построена едномерна  $x$ -лентова CDF  $F^{xR}(\cdot)$ , зададена чрез 9 оценени от размито-рационален ВР вътрешни възли, показани на фиг. 3.6.1 (горе). Немонотонната функция на полезност на ВР в интервала [30; 42] е линейно интерполирана по възлите и показана на фиг. 3.6.1 долу. Дефинираната  $x$ -лентова  $F^{xR}(\cdot)$  определя  $x$ -размито-рационалната GL-I –  $g^{xR} = \langle F^{xR}(x); x \rangle$ .

Лентовата  $F^{xR}(x)$  е апроксимирана по Лаплас (фиг. 3.6.1), Валд (фиг. 3.6.2), максимаксен и по Хурвиц $_{\alpha}$  критерии, след което е изчислена Лаплас, Валд, максимаксна и Хурвиц $_{0.7}$  очакваната полезност на  $g^{xR}$ , с интеграл на Стилтес както следва:  $E_i^{xL}(u/F_i^{xR})=0.265$  ;  $E_i^{xW}(u/F_i^{xR})=0.215$ ;  $E_i^{x-W}(u/F_i^{xR})=0.370$  ;  $E_i^{xH_{0.7}}(u/F_i^{xR})=0.2542$ .

Табл. 3.5.1. Вероятности, изчислени чрез критериите на изоставеното  $m$  и на нормираните средни при множество от вероятности 1. Вероятностите, изчислени по някой от двамата метода, които лежат извън интервалите си на неопределеност са дадени в получерно. Отрицателните вероятности са дадени в получерен курсив. Някои  $P^{Am}(\cdot)$  не са приложими (п.а.),

например вероятностите  $P^{A1}(\cdot)$  при втората алтернатива, тъй като  $\theta_{2,1}$  е невъзможно според ВР

		$P_d(\cdot)$	$P_u(\cdot)$	$P^{A1}(\cdot)$	$P^{A2}(\cdot)$	$P^{A3}(\cdot)$	$P^{A4}(\cdot)$	$P^{A5}(\cdot)$	$P^{NM}(\cdot)$
Маркетингова стратегия 1	$\theta_{1,1}$	0.32	0.38	<b>0.30</b>	0.35	0.35	0.35	0.35	0.3333
	$\theta_{1,2}$	0.3	0.34	0.32	<b>0.27</b>	0.32	0.32	0.32	0.3048
	$\theta_{1,3}$	0.18	0.28	0.23	0.23	0.18	0.23	0.23	0.219
	$\theta_{1,4}$	0.06	0.14	0.10	0.10	0.10	<b>0.05</b>	0.10	0.0952
	$\theta_{1,5}$	0.04	0.06	0.05	0.05	0.05	0.05	<b>0.00</b>	0.0476
Маркетингова стратегия 2	$\theta_{2,1}$	0	0	п.а.	0	0	0	0	0
	$\theta_{2,2}$	0.3	0.4	п.а.	<b>0.20</b>	0.35	0.35	0.35	0.3043
	$\theta_{2,3}$	0.5	0.51	п.а.	0.505	<b>0.355</b>	0.505	0.505	<b>0.4391</b>
	$\theta_{2,4}$	0.04	0.08	п.а.	0.06	0.06	<b>-0.09</b>	0.06	0.0522
	$\theta_{2,5}$	0.15	0.32	п.а.	0.235	0.235	0.235	<b>0.085</b>	0.2043
Маркетингова стратегия 3	$\theta_{3,1}$	0.18	0.28	0.28	0.23	0.23	0.23	п.а.	0.2421
	$\theta_{3,2}$	0.04	0.06	0.05	0.10	0.05	0.05	п.а.	0.0526
	$\theta_{3,3}$	0.3	0.34	0.32	0.32	0.37	0.32	п.а.	0.3368
	$\theta_{3,4}$	0.32	0.38	0.35	0.35	0.35	<b>0.40</b>	п.а.	0.3684
	$\theta_{3,5}$	0	0	0	0	0	0	п.а.	0
Маркетингова стратегия 4	$\theta_{4,1}$	0	0	п.а.	0	0	0	п.а.	0
	$\theta_{4,2}$	0.1	0.2	п.а.	<b>0.09</b>	0.15	0.15	п.а.	0.1415
	$\theta_{4,3}$	0.8	0.9	п.а.	0.85	<b>0.79</b>	0.85	п.а.	0.8019
	$\theta_{4,4}$	0.04	0.08	п.а.	0.06	0.06	<b>0</b>	п.а.	0.0566
	$\theta_{4,5}$	0	0	п.а.	0	0	0	п.а.	0

### ПРИМЕР 3.6.3. АПРОКСИМИРАНЕ НА $p$ -ЛЕНТОВИ CDF ПРИ НЕМОНОТОННИ ПОЛЕЗНОСТИ

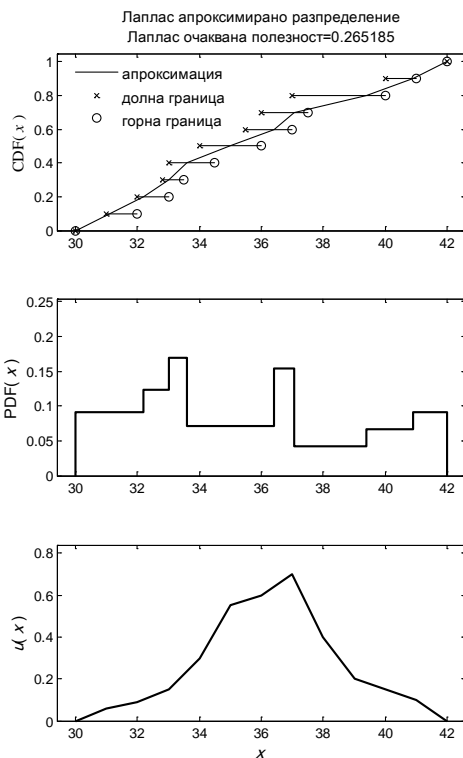
Дадена е едномерната случайна величина  $X$ , която заема стойности в интервала [30; 42]. Върху стойностите на  $X$  е построена едномерна  $p$ -лентова CDF  $F^{pR}(\cdot)$ , зададена чрез 7 оценени от размито-рационален ВР вътрешни възли, показани на фиг. 3.6.9 (горе). Немонотонната функция на полезност на ВР в интервала [30; 42] е линейно интерполирана по възлите и показана на фиг. 3.6.9 (долу). Дефинираната  $p$ -лентова  $F^{pR}(\cdot)$  определя  $p$ -размито-рационалната GL-I –  $g^{pR} = \langle F^{pR}(x); x \rangle$ .

Лентовата  $F^{pR}(x)$  е апроксимирана по Лаплас, Валд, максимаксен (фиг. 3.6.9) и по Хурвиц $_{\alpha}$  (фиг. 3.6.10) критерии, след което е изчислена Лаплас, Валд, максимаксна и Хурвиц $_{0.7}$  очакваната полезност на  $g^{pR}$ , с интеграл на Стилтес както следва:  $E_i^{pL}(u/F_i^{pR})=0.3126$  ;  $E_i^{pW}(u/F_i^{pR})=0.2286$  ;

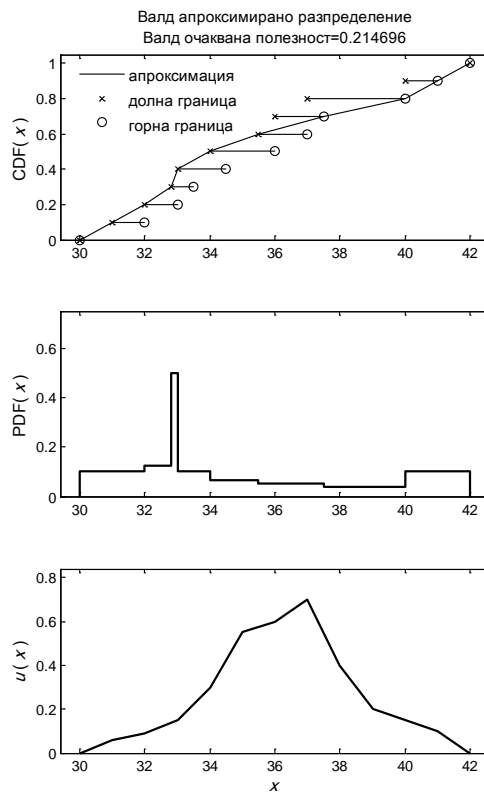
$$E_i^{p-W}(u/F_i^{p-W})=0.3532 ; E_i^{pH_{0.7}}(u/F_i^{pR})=0.266$$

Табл. 3.5.5. Лаплас, Валд, максимаксна, Хурвиц<sub>0.25</sub> и Хурвиц<sub>0.75</sub> очаквани полезности на алтернативите при всяко множество от вероятности. Максималната очаквана полезност при всеки критерий при всяко множество от вероятности е заштрихована.

$l_i$	$E_i^L(u/p)$	$E_i^W(u/p)$	$E_i^{-W}(u/p)$	$E_i^{H_{0.25}}(u/p)$	$E_i^{H_{0.75}}(u/p)$
$l_1$	0.806	0.772	0.836	0.820	0.788
$l_2$	0.640	0.636	0.645	0.643	0.638
$l_3$	0.678	0.664	0.700	0.691	0.673
$l_4$	0.710	0.696	0.720	0.714	0.702



Фиг. 3.6.1. Графика на  $F^{xL}(x)$ , плътност (PDF) и функция на полезност на ВР върху стойности на  $X$  от Пример 3.6.1 в интервала  $[30;42]$



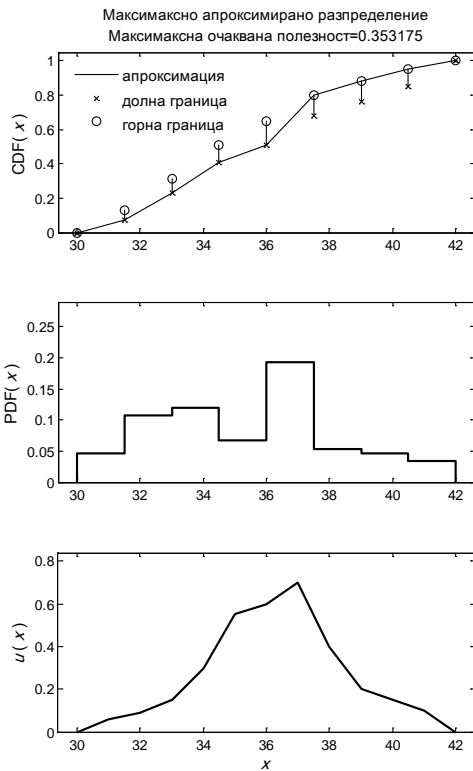
Фиг. 3.6.2. Графика на  $F^{xW}(x)$ , плътност (PDF) и функция на полезност на ВР върху стойности на  $X$  от Пример 3.6.1 в интервала  $[30;42]$

### 3.7. Оптимален залог на изходите от футболна среща чрез размито-рационални GL-II

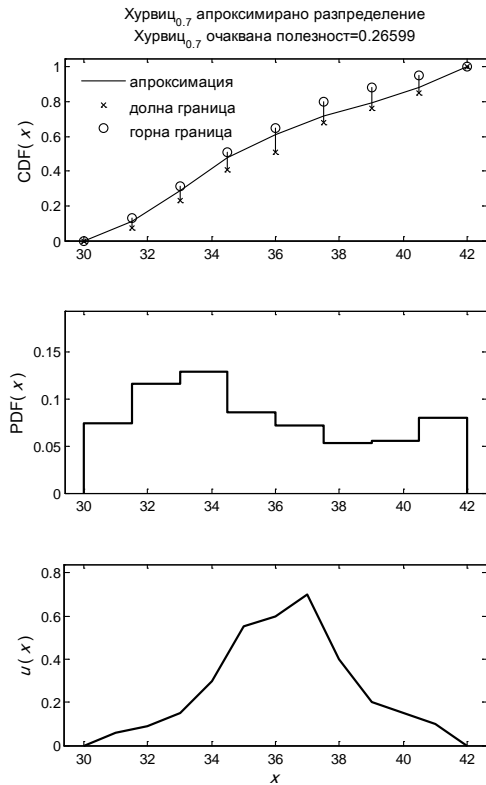
Букмейкърска къща предлага залози на изхода от футболна среща между отборите А (домакин) и В (гост). ВР може да заложит неотрицателните суми в долари  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  на всеки от изходите - победа на А (събитие  $\theta_1$ ), равен резултат (събитие  $\theta_2$ ) и победа на В (събитие  $\theta_3$ ). Коефициентите върху трите изхода са съответно  $coef_1=4/3$ ,  $coef_2=3.5$  и  $coef_3=6$ . При успешен залог от  $c_j$  на  $\theta_j$ , ВР ще получи сумата  $coef_j \times c_j$ , като чистата му печалба ще е  $(coef_j-1) \times c_j$ .

Според размито-рационалния ВР интервалите на неопределеност на събитията  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\theta_3$  са:

$$P(\theta_1)=[0.18; 0.22], P(\theta_2)=[0.45; 0.55], P(\theta_3)=[0.21; 0.29]. \quad (3.7.1)$$



Фиг. 3.6.9. Графика на  $F^{p-w}(\cdot)$ , плътност (PDF) и функция на полезност на ВР върху стойности на  $X$  от Пример 3.6.3 в интервала  $[30;42]$



Фиг. 3.6.10. Графика на  $F^{pH_{0.7}}(\cdot)$ , плътност (PDF) и функция на полезност на ВР върху стойности на  $X$  от Пример 3.6.3 в интервала  $[30;42]$

ВР трябва да реши как да заложи до \$100, на изходите от състезанието. Функцията на полезност на ВР върху чистата „печалба” в долари от залога  $x$  е:

$$u(x) = [\arctg(0.01x + 2) - \arctg(1)] / [\arctg(7) - \arctg(1)]. \quad (3.7.2)$$

Поставената задача съгласно т. 2.3.3, може да се моделира чрез едномерни размито-рационални GL-II с тримерен параметър  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , принадлежащ на непрекъснато тримерно множество  $C$ :

$$C = \{ \vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \mid c_1 \geq 0 \wedge c_2 \geq 0 \wedge c_3 \geq 0 \wedge c_1 + c_2 + c_3 \leq 100 \}, \quad (3.7.3)$$

$$I_{\vec{c}}^{fr} = \langle \langle \theta_1, 0.18, 0.78 \rangle, x_{\vec{c},1} \rangle; \langle \theta_2, 0.45, 0.45 \rangle, x_{\vec{c},2} \rangle; \langle \theta_3, 0.21, 0.71 \rangle, x_{\vec{c},3} \rangle, \text{ за } \vec{c} \in C, \quad (3.7.4)$$

$$x_{\vec{c},1} = c_1/3 - c_2 - c_3, \quad x_{\vec{c},2} = 5c_2/2 - c_1 - c_3, \quad x_{\vec{c},3} = 5c_3 - c_1 - c_2. \quad (3.7.5)$$

Тримерната оптимизационна задача в (3.7.3) се свежда до три едномерни и две двумерни оптимизационни задачи съответно в:

$$C_1 = \{ c_1 \mid c_1 \geq 0 \wedge c_1 \leq 100 \}, \quad (3.7.14)$$

$$C_2 = \{ c_2 \mid c_2 \geq 0 \wedge c_2 \leq 100 \}, \quad (3.7.18)$$

$$C_3 = \{ c_3 \mid c_3 \geq 0, c_3 \leq 100 \}, \quad (3.7.22)$$

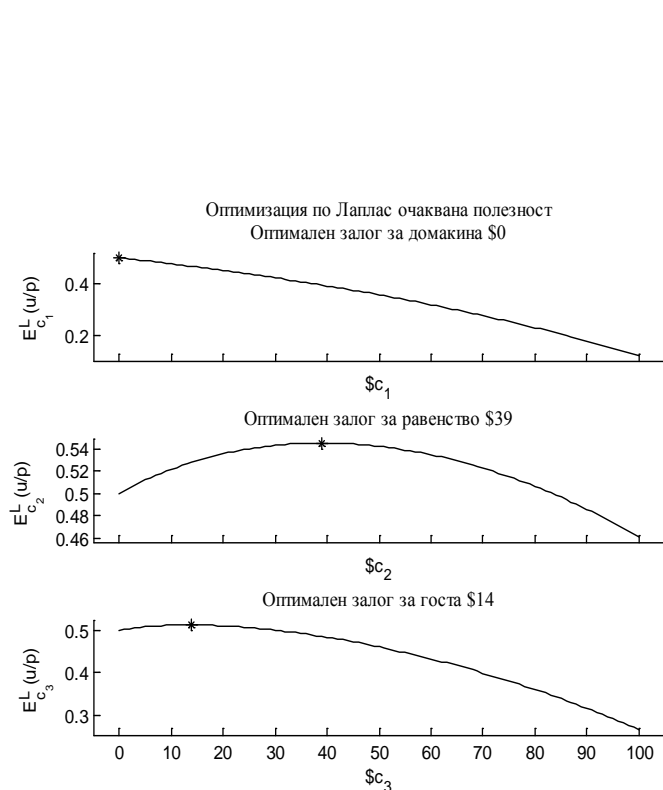
$$C_{1,3} = \{ \vec{c}_{1,3} = (c_1, c_3) \mid c_1 \geq 0 \wedge c_3 \geq 0 \wedge c_1 + c_3 \leq 100 \}, \quad (3.7.26)$$

$$C_{2,3} = \{ \vec{c}_{2,3} = (c_2, c_3) \mid c_2 \geq 0 \wedge c_3 \geq 0 \wedge c_2 + c_3 \leq 100 \}. \quad (3.7.30)$$

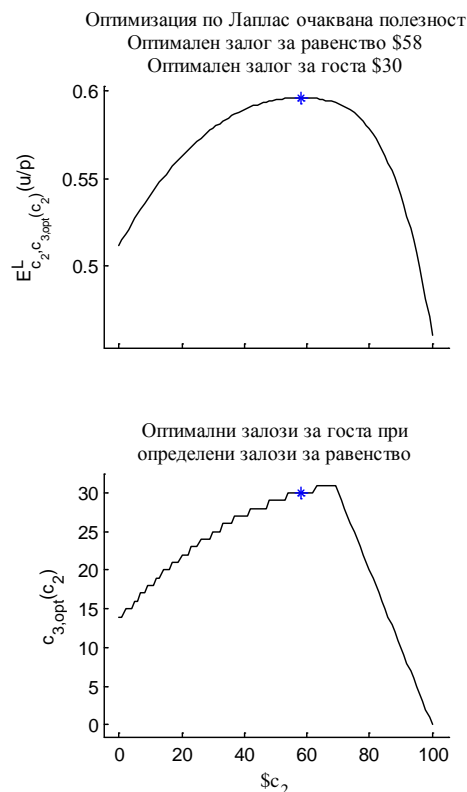
Решението в (3.7.26) съвпада с решението в (3.7.22) и затова не е дадено на фиг. 3.7.2 и 3.7.3, където



са показани решенията по Лаплас очаквана полезност на останалите оптимизационни задачи. Най-добрата възможност според размито-рационалния ВР, използващ критерия на Лаплас очаквана полезност, при дадените коефициенти и оценените субективни вероятности е да заложи \$58 на равенство и \$30 на победа на В. Аналогично ако се използва Валд очаквана полезност най-добрата възможност според размито-рационалния ВР (който е краен песимист) е да заложи \$54 на равенство и \$31 на победа на В.



Фиг. 3.7.2. Лаплас очаквана полезност на възможните единични залози



Фиг. 3.7.3. Оптимизация по Лаплас и очаквана полезност на двойния залог върху равенство и победа на В

### 3.8. Избор на домашна отоплителна система чрез размито-рационални SGL-I

През 2006 г. са разгледани 5 отоплителни схеми за градски апартамент с площ  $80m^2$ , който включва две спални, хол, кухня и сервизни помещения (тоалет, баня, килер и коридор), със стандартна височина от  $2.5m$ , топлоизолация на северната стена и PVC дограма с термомостове на прозорците. В апартаментата няма изградена локална отоплителна инсталация.

Необходимо е да се ранжират по предпочитание елементите на множеството  $L = \{ L_1^{fr}, L_2^{fr}, L_3^{fr}, L_4^{fr}, L_5^{fr} \}$ , съдържащо следните алтернативи за отопление:  $L_1^{fr}$  – изграждане на инсталация с котел на твърдо гориво (въглища, дърва);  $L_2^{fr}$  – изграждане на инсталация с котел на ел. ток;  $L_3^{fr}$  – инсталиране на климатици;  $L_4^{fr}$  – изграждане на инсталация с котел на природен газ;  $L_5^{fr}$  – запазване на сегашната отоплителна система (печки на ел. ток).

Времевия хоризонт на решението е 10 години (от средата на 2006 г. до средата на 2016 г.). При формализиране на алтернативите са направени следните допускания: а) отоплителния сезон трае 150 дни (ноември-март); б) 1/3 от консумираната електроенергия ще се заплаща по нощна тарифа; в) всяка алтернатива осигурява нормална стайна температура в четирите стаи на апартаментата; г) алтернативи  $L_1^{fr}$ ,  $L_2^{fr}$  и  $L_4^{fr}$  предполагат изграждането на локална отоплителна система, която обслужва и сервизните помещения, докато последните са неотопляеми при алтернативи  $L_3^{fr}$  и  $L_5^{fr}$ ; д) проточният бойлер има 20% по-нисък разход на енергия от електрически; е) изчисленията върху алтернативите започват от отоплителен сезон 2006/2007; ж) разходите за отопление при алтернативи  $L_3^{fr}$  и  $L_5^{fr}$  са пропорционални на отоплявания обем, докато при другите, намаляването на разходите за отопление е много по-малко от намаляването на отоплявания обем.

Очертават се осем цели при избора на алтернатива: 1) да се минимизират разходите за отопление; 2) да се минимизира инвестицията; 3) да се минимизира времето за ремонт; 4) да се максимизира достъпността на топла вода (за къпане) през годината; 5) да се минимизира трудоемкостта; 6) да се минимизира инертността на отоплителната система; 7) да се максимизира пространствената управляемост; 8) да се отопляват сервизните помещения.

Степента на удовлетворение на ВР в първите две цели се измерва чрез два непрекъснати атрибути: а)  $X_1^c$  – NPV (нетна сегашна стойност) на средните годишни разходи за отопление; б)  $X_2^c$  – размер на инвестицията в хил. лв. Степента на удовлетворение на ВР в другите шест цели се измерват чрез шест дискретни атрибути: а)  $X_1^d$  – време за изграждане на инсталацията в дни; б)  $X_2^d$  – номинален критерий: 3-целогодишно наличие на топла вода за къпане от инсталацията; 2- наличие на топла вода за къпане от инсталацията само през зимата; 1-липсва топла вода за къпане от инсталацията; в)  $X_3^d$  – номинален критерий: 2-ниска трудоемкост, 1-висока трудоемкост; г)  $X_4^d$  – номинален критерий: 3-ниска инертност, 2-средна инертност, 1-висока инертност; д)  $X_5^d$  – номинален критерий: 2-добра пространствена управляемост, 1-лоша пространствена управляемост; е)  $X_6^d$  – номинален критерий: 2-има отопление в сервизните помещения, 1-няма отопление в сервизните помещения.

Векторният атрибут  $X^c$  е произведение на двете едномерни множества на непрекъснатите атрибути  $X_1^c$  и  $X_2^c$ , а векторния атрибут  $X^d$  е произведение на шестте едномерни множества на дискретните атрибути  $X_1^d$ ,  $X_2^d$ ,  $X_3^d$ ,  $X_4^d$ ,  $X_5^d$  и  $X_6^d$ . Множеството на атрибутите  $X$  е произведение от шест-мерното множество на векторния атрибут  $X^d$  и двумерното множество на векторния атрибут  $X^c$ . В табл. 3.8.1 са дадени векторите на дискретните последствия при различните варианти на алтернативите, заедно с лентовите им вероятности, където  $t_i$  е броя на различните варианти (дискретни последствия) от  $i$ -тата алтернатива.

Следователно  $L_1^{fr}, L_2^{fr}, L_3^{fr}, L_4^{fr}, L_5^{fr}$  ще се моделират чрез размито-рационални SGL-I и проблема се свежда до ранжирането на такива съгласно очакваната полезност.

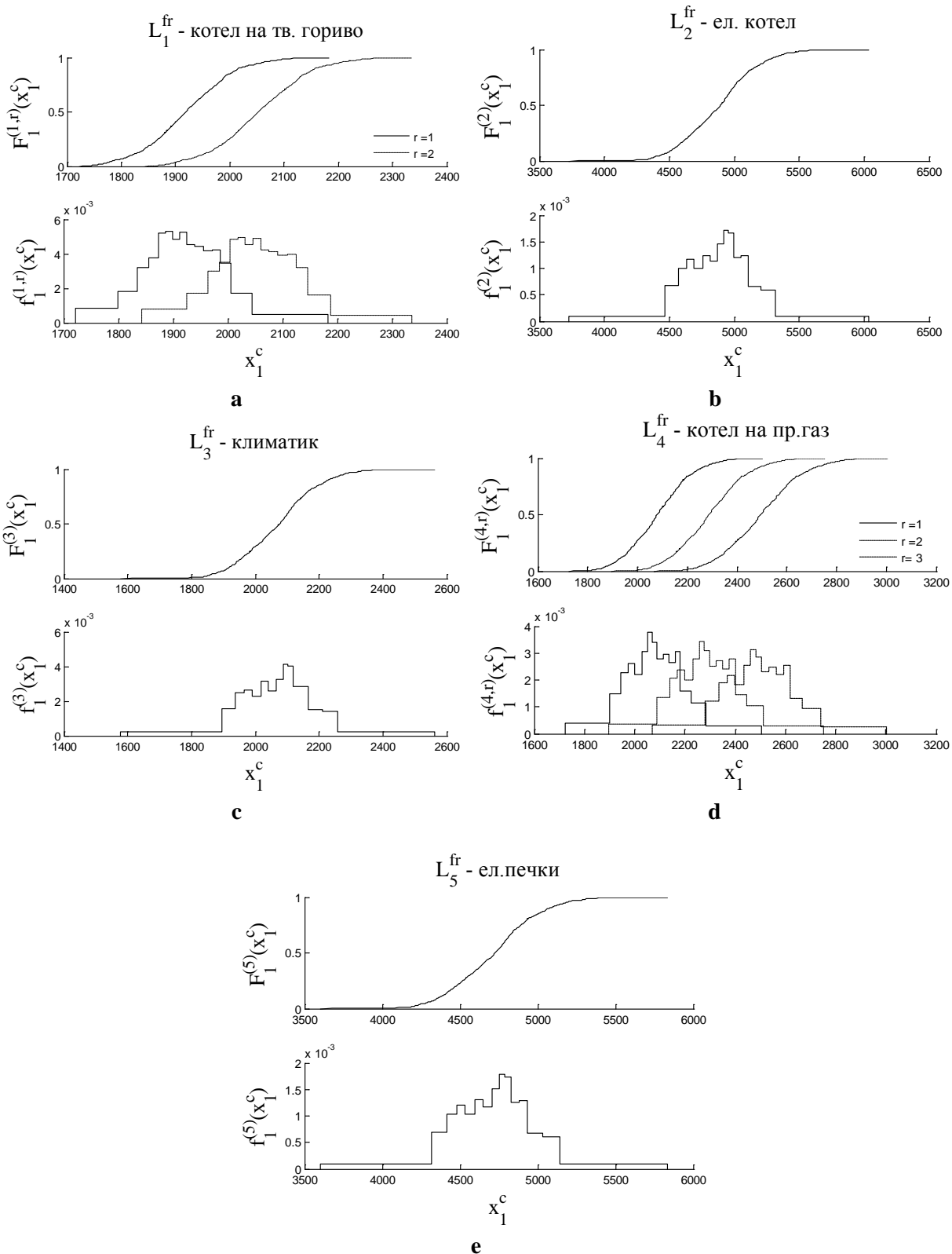
В така формулираната задача се допуска, че: 1) несигурността на ВР в стойностите на непрекъснатите атрибути  $X_1^c$  и  $X_2^c$  може да се опише чрез SICDF; 2) при  $L_2^{fr}$ , несигурността в базовите векторни атрибути е описана чрез VICDF. Несигурността, свързана с  $X_1^c$  е оценена чрез рисков анализ, описан в Приложение 11. Получени са разпределения на атрибута, показани на фиг. П11.3. Несигурността, свързана с  $X_2^c$  е описана с лентови CDF (фиг. 3.8.1).

ВР е оценил, че: 1) предпочитанията на ВР върху векторните атрибути  $X^c$  и  $X^d$  са взаимно полезно независими; 2) предпочитанията на ВР върху непрекъснатите атрибути в  $X^c$  и върху дискретните атрибути в  $X^d$  са взаимно полезно независими. Трите оценени взаимни полезности независимости, гарантират съществуването на функции на полезност върху отделните атрибути.

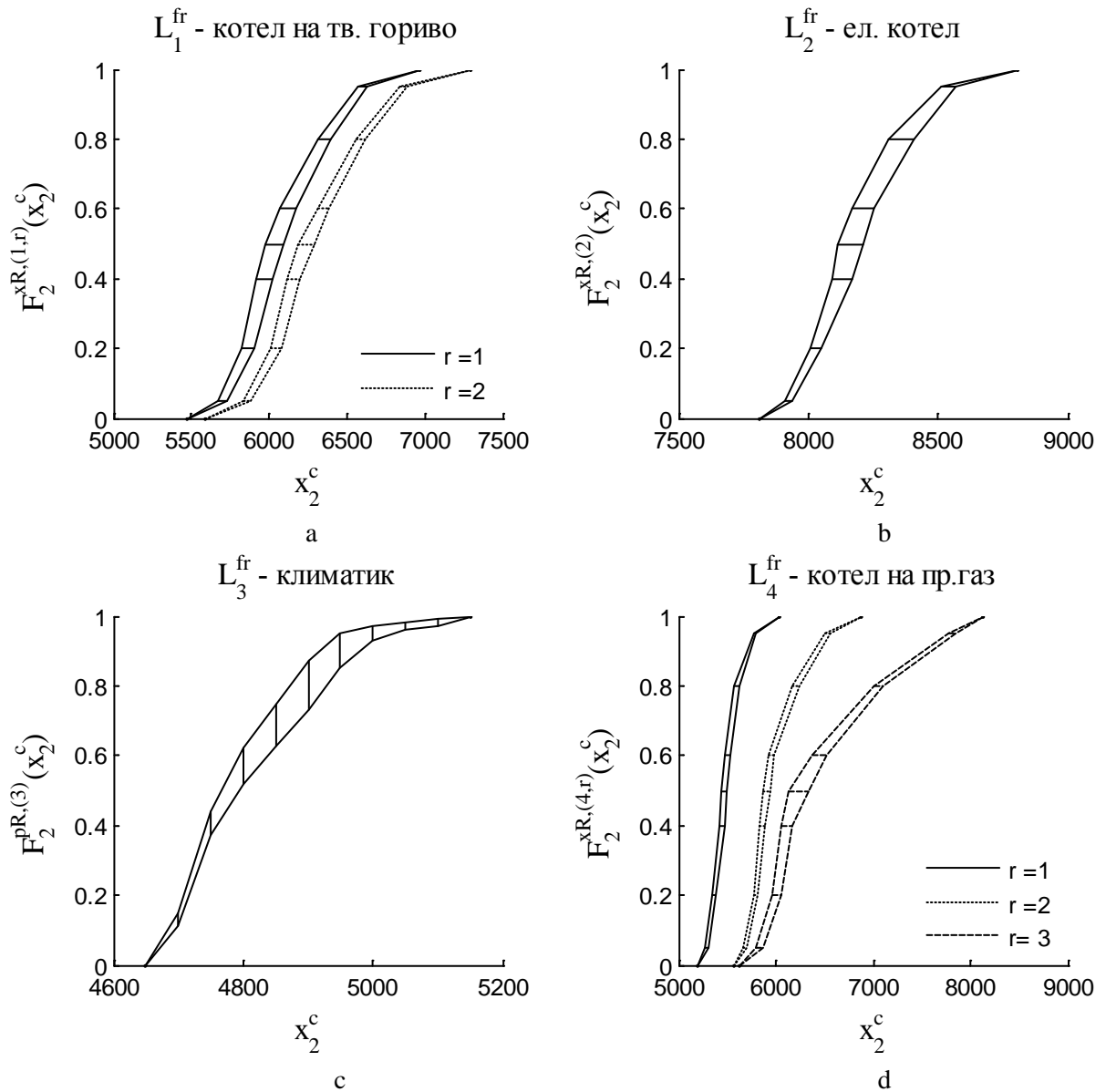
Функцията на полезност  $u_1^c(.)$  на  $X_1^c$  е построена в интервала [1000; 7000] и показана на фиг. 3.2.11a, където  $X_1^c$  е означена като едномерна непрекъсната случайна величина  $X$ . Използваната в по-нататъшните изчисления  $u_1^c(.)$  е линейно интерполирана по 100 възела. Функцията на полезност  $u_2^c(.)$  на  $X_2^c$  е построена в интервала [0; 9000] и показана на фиг. 3.2.11b, където  $X_2^c$  е означена като едномерна непрекъсната случайна величина  $Y$ . Използваната в по-нататъшните изчисления  $u_2^c(.)$  е линейно интерполирана по 100 възела. Функцията на полезност  $u_1^d(.)$  на  $X_1^d$  е построена за  $X_1^d \in \{0, 3, 40, 50, 75, 100\}$ , където  $X_1^d$  е означена като едномерна дискретна случайна величина  $Z$ .

Табл. 3.8.1. Описание на дискретната част на последствията

$L_i^{fr}$	$\bar{x}_{i,r}^d$	последствие	$P_{i,r}^d$	$P_{i,r}^u$	$t_i$
$L_1^{fr}$	$\bar{x}_{1,1}^d$	(40, 2, 1, 1, 1, 2)	<b>0.43</b>	<b>0.57</b>	2
	$\bar{x}_{1,2}^d$	(50, 2, 1, 1, 1, 2)	<b>0.43</b>	<b>0.57</b>	
$L_2^{fr}$	$\bar{x}_{2,1}^d$	(40, 3, 2, 2, 1, 2)	<b>0.45</b>	<b>0.55</b>	2
	$\bar{x}_{2,2}^d$	(50, 3, 2, 2, 1, 2)	<b>0.45</b>	<b>0.55</b>	
$L_3^{fr}$	$\bar{x}_{3,1}^d$	(3, 1, 2, 3, 2, 1)	<b>1</b>	<b>1</b>	1
$L_4^{fr}$	$\bar{x}_{4,1}^d$	(50, 3, 2, 2, 1, 2)	<b>0.50</b>	<b>0.70</b>	3
	$\bar{x}_{4,2}^d$	(75, 3, 2, 2, 1, 2)	<b>0.25</b>	<b>0.35</b>	
	$\bar{x}_{4,3}^d$	(100, 3, 2, 2, 1, 2)	<b>0.08</b>	<b>0.12</b>	
$L_5^{fr}$	$\bar{x}_{5,1}^d$	(0, 1, 2, 3, 2, 1)	<b>1</b>	<b>1</b>	1



Фиг. П11.3. а) класически CDF (горе) и PDF (долу) на  $x_1^c$  при двете дискретни последствия на  $L_1^{fr}$ ; б) класическа CDF (горе) и PDF (долу) на  $x_1^c$  на  $L_2^{fr}$ ; в) класическа CDF (горе) и PDF (долу) на  $x_1^c$  на  $L_3^{fr}$ ; г) класически CDF (горе) и PDF (долу) на  $x_1^c$  при трите дискретни последствия на  $L_4^{fr}$ ; е) класическа CDF (горе) и PDF (долу) на  $x_1^c$  на  $L_5^{fr}$



Фиг. 3.8.1. а)  $x$ -лентови CDF на  $x_2^c$  при двете дискретни последствия на  $L_1^{fr}$ ; б)  $x$ -лентова CDF на  $x_2^c$  при  $L_2^{fr}$ ; в)  $p$ -лентова CDF на  $x_2^c$  при  $L_3^{fr}$ ; д)  $x$ -лентови CDF на  $x_2^c$  при трите дискретни последствия на  $L_4^{fr}$

Най-предпочитаната стойност на  $X_2^d$  е 3, а най-нежеланата е 1, следователно  $u_2^d(3)=1$ ,  $u_2^d(1)=0$ . Полезността на третата възможна стойност 2 е оценена по LE на  $u_2^d(2)=0.3$ .

$$u_2^d(x_2^d) = \begin{cases} 1 & \text{за } x_2^d = 3 \\ 0.3 & \text{за } x_2^d = 2. \\ 0 & \text{за } x_2^d = 1 \end{cases} \quad (3.8.1)$$

Аналогично, най-предпочитаната стойност на  $X_4^d$  е 3, а най-нежеланата е 1, следователно  $u_4^d(3)=1$ ,  $u_4^d(1)=0$ . Полезността на третата възможна стойност 2 е оценена по LE на  $u_4^d(2)=0.6$ .

$$u_4^d(x_4^d) = \begin{cases} 1 & \text{за } x_4^d = 3 \\ 0.6 & \text{за } x_4^d = 2 \\ 0 & \text{за } x_4^d = 1 \end{cases} \quad (3.8.2)$$

Атрибутите  $X_3^d$ ,  $X_5^d$  и  $X_6^d$  имат по две възможни стойности – 2 (предпочитаната) и 1 (нежеланата). Полезността при тях по дефиниция е

$$u_j^d(x_j^d) = \begin{cases} 1, & \text{за } x_j^d = 2 \\ 0, & \text{за } x_j^d = 1 \end{cases}, \text{ за } j=3, 5 \text{ и } 6. \quad (3.8.3)$$

ВР е оценил интервалите на неопределеност на скалиращите константи върху  $X_1^c$  и  $X_2^c$  съответно като  $k_1^c \in [0.78; 0.90]$ ,  $k_2^c \in [0.15; 0.25]$ . Съгласно (2.1.23), (2.1.24) и (2.1.25),  $a_2=0.93$ ,  $b_2=1.15$ , а  $s=(0.93+1.15)/2=1.04>1$ , което отговаря на условията за нетривиалност. Разпределението на сумата от двете скалиращи константи може да бъде построено аналитично и  $\hat{p}_{value} \approx 0.583$ . При избрано ниво на значимост  $\alpha=0.10$ ,  $H_0$  не може да се отхвърли, тъй като  $\hat{p}_{value} \approx 0.583 \geq 0.10 = \alpha$ . От (2.1.93) следва, че  $\beta=(1.15-1)/(1.15-0.93)=0.6818$  и точковите оценки на скалиращите константи са:  $\hat{k}_1^c = \beta k_1^{d,c} + (1-\beta)k_1^{u,c} = 0.6818 \times 0.78 + (1-0.6818) \times 0.9 = 0.818$ ,  $\hat{k}_2^c = 0.182$ . Двумерната функция на полезност върху непрекъснатите атрибути има адитивен вид:

$$u^c(\bar{x}^c) = u^c(x_1^c, x_2^c) = 0.818u_1^c(x_1^c) + 0.182u_2^c(x_2^c). \quad (3.8.4)$$

Това показва, че предпочитанията на ВР върху непрекъснатите атрибути са MASI.

ВР е оценил интервалите на неопределеност на скалиращите константи върху  $X_1^d$ ,  $X_2^d$ ,  $X_3^d$ ,  $X_4^d$ ,  $X_5^d$  и  $X_6^d$ :  $k_1^d \in [0.037; 0.257]$ ,  $k_2^d \in [0.169; 0.389]$ ,  $k_3^d \in [0.206; 0.424]$ ,  $k_4^d \in [0.074; 0.294]$ ,  $k_5^d \in [0.131; 0.351]$  и  $k_6^d \in [0.056; 0.276]$ . Съгласно (2.1.23), (2.1.24) и (2.1.25),  $a_6=0.673$ ,  $b_6=1.993$ , а  $s=(0.673+1.993)/2=1.333>1$ , което отговаря на условията за нетривиалност.

Използвайки числената реализация на равномерния метод с  $N_3=N_4=N_5=N_6=1000$  взела е получена  $\hat{f}_{y_6}(\cdot)$  с четирикратно прилагане на Алгоритъм 2.1.5. След приложение на Алгоритъм 2.1.7, при  $s=1.3324>1$  се получава  $\hat{p}_{value} \approx 0.0301$ . Следователно  $H_0$  се отхвърля, а  $H_1$  се приема при  $\alpha=0.1$ , тъй като  $\hat{p}_{value} \approx 0.0301 \leq 0.1 = \alpha$ . Съгласно (2.1.94), точковите оценки на скалиращите константи се намират като  $\hat{k}_1^d = (k_{1,d}^d + k_{1,u}^d)/2 = (0.037+0.257)/2 = 0.147$  и аналогично  $\hat{k}_2^d = 0.279$ ,  $\hat{k}_3^d = 0.316$ ,  $\hat{k}_4^d = 0.184$ ,  $\hat{k}_5^d = 0.241$ ,  $\hat{k}_6^d = 0.166$ . Използвайки симулационната реализация на равномерния метод, чрез Алгоритъм 2.1.6, с  $Q=100000$  псевдо-реалности, е построена и изчислена  $\hat{p}_{value} \approx 0.0302$  и се получават същите точкови оценки на скалиращите константи, както при числената реализация на равномерния метод.

Шест-мерната функция на полезност върху непрекъснатите атрибути е от мултипликативен вид:

$$u^d(\bar{x}^d) = u^d(x_1^d, x_2^d, x_3^d, x_4^d, x_5^d, x_6^d) = 1.8843 - 1.8843 \left\{ \left[ 1 - 0.0778u_1^d(x_1^d) \right] \times \left[ 1 - 0.1479u_2^d(x_2^d) \right] \times \left[ 1 - 0.1679u_3^d(x_3^d) \right] \times \left[ 1 - 0.0978u_4^d(x_4^d) \right] \times \left[ 1 - 0.1278u_5^d(x_5^d) \right] \times \left[ 1 - 0.0878u_6^d(x_6^d) \right] \right\} \quad (3.8.5)$$

Това показва, че предпочитанията на ВР върху дискретните атрибути са MUSI.

ВР е оценил интервалите на неопределеност на скалиращите константи върху  $X^c$  и  $X^d$ , съответно като  $k^c \in [0.25; 0.37]$ ,  $k^d \in [0.40; 0.50]$ . Случаят е тривиален, защото  $a_2=0.65$ ,  $b_2=0.87$ . Следва, че  $\hat{p}_{value}=0$ , като  $H_0$  се отхвърля и се приема  $H_1$ . Функцията на полезност върху  $X$  се опростява до

$$u(\bar{x}) = u(\bar{x}^c, \bar{x}^d) = \hat{k}^c u^c(\bar{x}^c) + \hat{k}^d u^d(\bar{x}^d) + (1 - \hat{k}^c - \hat{k}^d) u^c(\bar{x}^c) u^d(\bar{x}^d) = 0.31u^c(\bar{x}^c) + 0.45u^d(\bar{x}^d) + 0.24u^c(\bar{x}^c)u^d(\bar{x}^d) \quad (3.8.7)$$

Това показва, че предпочитанията на ВР върху базовите векторни атрибути са MUVI.

Съгласно табл. 3.8.1,  $L_1^{fr}$  и  $L_4^{fr}$  се представят като размито-рационални SGL-I, с MUVI предпочитания.  $Q$ -очакваните полезности на  $L_1^{fr}$  и  $L_4^{fr}$  се изчисляват по процедурата от т. 2.3.5.2, където BF-GL-I са описани с лентови SICDF, при MASI предпочитанията. Следователно,  $Q$ -очакваните полезности на BF-GL-I са получени по процедурата от т. 2.3.3.6. Резултатите при различни критерии са дадени в първа и четвърта колона на таблица 3.8.7.

Съгласно табл. 3.8.1,  $L_2^{fr}$  може да се представи като размито-рационална SGL-I с MUVI предпочитания, където несигурността в базовите векторни атрибути е описана чрез VICDF.  $Q$ -очакваната полезност на  $L_2^{fr}$  се изчислява по процедурата от т. 2.3.5.3, където BF-GL-I е описана с лентова SICDF, при MASI предпочитания. Следователно, нейната  $Q$ -очаквана полезност може да се получи по процедурата от т. 2.3.3.6. Резултатите при различни критерии са дадени във втора колона на таблица 3.8.7.

Съгласно табл. 3.8.1,  $L_3^{fr}$  може да се представи като размито-рационална SGL-I с MUVI предпочитания и с една дискретна векторна стойност.  $Q$ -очакваната полезност на  $L_3^{fr}$  се изчислява по процедурата от т. 2.3.5.4, където BF-GL-I е описана с лентова SICDF, при MASI предпочитания. Следователно, нейната  $Q$ -очаквана полезност може да се получи по процедурата от т. 2.3.3.6. Резултатите при различни критерии са дадени в трета колона на таблица 3.8.7.

Съгласно табл. 3.8.1,  $L_5^{fr}$  може да се представи като класическо-рискова SGL-I, с MUVI предпочитанията и с една дискретна векторна стойност. Очакваната полезност на  $L_5^{fr}$  се изчислява по процедурата от т. П.3.5.4, където класическо-рисковата BF-GL-I е описана с класическа SICDF, при MASI предпочитания. Следователно, нейната очаквана полезност може да се получи по процедурата от т. ПЗ.2.5. Резултатите са дадени в пета колона на таблица 3.8.7.

От таблица 3.8.7 се вижда, че при всеки от критериите се получава еднакво ранжиране на алтернативите, като очакваните полезности слабо се отличават. Според проведените анализ, размито-рационалния ВР трябва да избере трета алтернатива, т.е. отопление с климатици, но четвъртата алтернатива – отопление с котел на природен газ – има на практика същата очаквана полезност.

Табл. 3.8.7.  $Q$ -очаквани полезности на петте алтернативи за примера от т.3.8.

$Q$	$E_1^Q(u/p)$	$E_2^Q(u/p)$	$E_3^Q(u/p)$	$E_4^Q(u/p)$	$E_5(u/p)$
$L$	0.488	0.354	0.692	0.685	0.454
$W$	0.487	0.354	0.691	0.681	0.454
$\neg W$	0.49	0.354	0.692	0.690	0.454
$H_{0.25}$	0.489	0.354	0.692	0.688	0.454
$H_{0.75}$	0.488	0.354	0.691	0.683	0.454

## Заклучение

В резултат на представената разработка се претендира за следните приноси:

1. Разработени са алгоритми за аналитична апроксимация на монотонна едномерна полезностна функция по интервално оценени възли. Проведено е емпирично изследване, при което на 104 ВР са оценени интервалите на неопределеност на 9 вътрешни възли по 3 метода. Върху тях емпирично е установена адекватността на arctg-апроксимация на полезността за моделиране типичните отношения към риска на ВР върху печалби и загуби. Емпирично е показано, че задоволителна arctg-апроксимация на полезността се получава даже при 5 оценени вътрешни възли.

2. Разработен е алгоритъм за оценяване интервала на неопределеност на екстремума по предпочитание на едномерна непрекъсната унимодална ценностна функция при пълна сигурност. На тази база е формализирана и процедура за построяване на функция на полезност при произволни немонотонни предпочитания на размито-рационалните ВР.

3. Разработена е процедура за статистическо тестване на хипотезата, че сумата на интервално оценени скалиращи константи е единица. При взаимна полезностна независимост на атрибутите, методът намира адекватни точкови оценки на константите и установява формата на многомерната функция на полезност.

4. Предложени са едномерни и многомерни лентови кумулативни вероятностни функции, както и лентови дискретни вероятностни функции за описание на произволни състояния с частично измерена несигурност. С тяхна помощ размито-рационалните алтернативи са моделирани чрез размито-рационални обикновени, генерализирани и полу-генерализирани лотарии от  $\Gamma^{\text{ви}}$  тип, в зависимост от непрекъснатостта на ултимативните им изходи.

5. За ранжирането на размито-рационалните лотарии са създадени „критерия на Лаплас-очаквана полезност“ и „критерия на Хурвица-очаквана полезност“, които са алгоритмизирани в различни модификации, подходящи за отделните модели на размито-рационални алтернативите. Тези критерии обобщават както едноименните критерии при пълна несигурност, така и критерия за максимална очаквана полезност при риск, като в същото време отчитат степента на песимизъм на размито-рационалните ВР.

6. Разработен е програмен пакет от функции, работещи под MATLAB 7.0 (R14), реализиращи споменатите по-горе методи и алгоритми. С помощта на програмния пакет са решени различни нетривиални примери, като получените резултати са сравнени с решения от съществуващи стандартни подходи.

Някои насоки за бъдеща работа могат да се намерят в следните аспекти:

- Изследване съвместното влияние на интервалите на неопределеност в оценките на полезностите и вероятностите върху  $Q$ -очакваните полезности на алтернативите;
- Изследване на влиянието на различни методи за оценка на едномерна полезност върху размито-рационалните решения;
- Разработване на алгоритми, използващи лентови едномерни и многомерни PDF;
- Изграждане на интуитивни модели за вземане на решения от размито-рационален ВР.

Основни елементи на представения дисертационен труд са публикувани в единадесет труда.

1. Tenekedjiev, K., **Nikolova, N.D.** (2007) Ranking Discrete Outcome Alternatives with Partially Quantified Uncertainty, International Journal of General Systems (in print)
2. **Nikolova, N.D.** (2007) Three Criteria to Rank X-Fuzzy-Rational Generalized Lotteries of I Type, Cybernetics and Information Technologies (in print)
3. **Nikolova, N.D.** (2007) Uniform Method For Estimation of Interval Scaling Constants, Проблеми машиностроения и автоматизации, выпуск №1, стр., 79-90.
4. **Николова, Н.Д.** (2007) Емпирична връзка между броя оценени възли и качеството на аналитичната апроксимация на едномерна функция на полезност, Машиностроене и машинознание, серия „Икономика и мениджмънт”, Кн. 2, стр. 99-110.
5. Tenekedjiev, K., **Nikolova, N.D.**, Toneva, D. (2006) Laplace Expected Utility Criterion for Ranking Fuzzy Rational Generalized Lotteries of I Type, Cybernetics and Information Technologies, Volume 6, No. 3, pp. 93-109.
6. **Nikolova, N.D.** (2006) Two Criteria to Rank Fuzzy Rational Alternatives, Proc. International Conference on Automatics and Informatics, 3-6 October, Sofia, Bulgaria, pp. 283-286.
7. Tenekedjiev, K., **Nikolova, N.D.**, Kobashikawa, C., Hirota, K. (2006) Conservative Betting on Sport Games with Intuitionistic Fuzzy Described Uncertainty, Proc. Third International IEEE Conference on Intelligent Systems IS'2006, Westminster, UK, pp.747-754.
8. **Nikolova, N.D.**, Hirota, K., Kobashikawa, C., Tenekedjiev, K. (2006) Elicitation Of Non-Monotonic Preferences Of A Fuzzy Rational Decision Maker, Information Technologies and Control, Year IV, Volume 1, pp. 36-50.
9. **Nikolova, N.D.**, Shulus, A., Toneva, D., Tenekedjiev, K. (2005) Fuzzy Rationality in Quantitative Decision Analysis, Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics, Volume 9, No. 1, pp. 65-69.
10. **Nikolova, N.D.**, Dimitrakiev, D., Tenekedjiev, K. (2004) Fuzzy Rationality in the Elicitation of Subjective Probabilities, Proc. Second International IEEE Conference on Intelligent Systems IS'2004, Varna, Bulgaria, Volume III, pp. 27-31.
11. **Nikolova, N.D.**, Dimitrakiev, D., Tenekedjiev, K. (2004) Fuzzy Rationality in the Elicitation of Subjective Quantiles, Proc. Second International IEEE Conference on Intelligent Systems IS'2004, Varna, Bulgaria, Volume III, pp. 32-34.

Публикациите могат да се класифицирани както следва:

Самостоятелни	<b>4</b> (2,3,4,6)
На 1 място	<b>4</b> (8,9,10,11)
На 2 място	<b>3</b> (1,5,7)

	Статии	Доклади	Общо
В чужбина	<b>3</b> (1,3,9)	<b>1</b> (7)	4
В България	<b>4</b> (2,4,5,8)	<b>3</b> (6,10,11)	7
Общо	7	4	11

Представените публикации имат общ импакт фактор от 0.855, а трудовете 5, 6 и 9 са цитирани общо три пъти (1 път в чужбина и 2 пъти в България) съответно в следните публикации:

*Лесидренска, С., Автоматизация на контролинга във фирмата – методически аспекти, Машиностроене и машинознание, книга 2, стр. 89-93, 2007*

*Tenekedjiev, K., Hurwicz, Expected Utility Criterion for Decision with Partially Quantified Uncertainty, Proc. First International Workshop on Intuitionistic Fuzzy Sets, Generalized Nets and Knowledge Engineering, pp. 56-75, University of Westminster, London, UK, 2006*

*Янкова, В., Димитракиева, Св., WWW и възможностите пред маркетинга, Шеста научно-приложна конференция по съвременни проблеми в теорията и практиката на управление на предприятия, Варна, стр. 253-265, Варна, България, 2006*

За труд 6 от списъка, докторантката е получила диплома за най-добре представен доклад на Международната конференция „Автоматика и информатика” (октомври 2006 г., София). Въз основа на покана от издателите, труд 7 ще бъде доразработен и публикуван в сборник от подбрани доклади от Третата международна IEEE конференция по Интелигентни системи'06 с издатели – проф. Панаетис Чоунтас, проф. Януш Каспърчек и проф. Илиас Петрониас.