

ИЗСЛЕДВАНЕ НА ВЛИЯНИЕТО НА ДИСКРЕТИЗАЦИЯТА ВЪРХУ ТОЧНОСТТА НА МЕТОДА НА КРАЙНИТЕ ЕЛЕМЕНТИ И ТРАНСЛАЦИОННИЯ МЕТОД ПРИ РЕШАВАНЕТО НА ЕДНОМЕРНИ ДИНАМИЧНИ ЗАДАЧИ

Васил С. Апостолов, ВВМУ "Н. Й. Вапцаров", Варна
Христинка Г. Иванова, ВВМУ "Н. Й. Вапцаров", Варна

RELATION BETWEEN THE DISCRETIZATION AND THE ACCURACY OF FINITE ELEMENT METHOD AND TRANSLATION METHOD FOR ONE-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEMS

Vasil S. Apostolov, Naval Academy „N. Y. Vaptsarov“, Varna
Hristinka G. Ivanova, Naval Academy „N. Y. Vaptsarov“, Varna

Abstract: *The basic peculiarities of FEM and TM are described. The relation between the discretization and the accuracy of both methods are investigated. Based on the results received the advantages of TM in comparison with FEM for one-dimensional dynamic problems are shown.*

Key words: *discretization, dynamic problems, accuracy, FEM, TM.*

1. ВЪВЕДЕНИЕ

Методът на крайните елементи (МКЕ) и Транслационния метод (ТМ) са изградени на една и съща основна предпоставка: предварителна физическа дискретизация на разглеждания обект, като във всеки участък елементът се приема с постоянно напречно сечение. В работата е извършен съпоставителен анализ на двата метода по отношение на влиянието на дискретизацията върху точността на получаваните резултати. Изследването е извършено за едномерни задачи - греди на конкретни примери.

2. СЪПОСТАВЯНЕ НА ДВАТА МЕТОДА ПО ОТНОШЕНИЕ НА СЪЩНОСТТА ИМ

2.1. Същност на метода на крайните елементи (МКЕ)

Една от основните операции, заложена в МКЕ е определянето на интерполиращ полином, чрез който се изразява изменението на търсената функция на преместването в рамките на отделния краен елемент.

Основната трудност на построението на полинома се състои в това, че използваните интерполиращи функции за всеки краен елемент трябва да осигуряват непрекъснатост на функцията $w(x, y, z)$ и нейните производни до $m - 1$ -ви порядък включително за цялата област V (или L за едномерни задачи), където $2m$ е порядъка на диференциалното уравнение за описване на съответната гранична задача. Изпълнението на това изискване осигурява сходимостта на решението по МКЕ към точното при намаляване на размерите на крайните елементи.

Непрекъснатостта на функцията $w(x)$ и нейните производни до $m - 1$ -ви порядък в интервала ще се осигури, ако степента n на всеки полином удовлетворява зависимостта

$$(1) \quad n + 1 \geq 2m \quad .$$

Това условие следва от условието за стационарност на функционала $\Phi(w)$, който съответства на дадената гранична задача $\delta\Phi(w) = 0[I]$. Функционалът $\Phi(w)$ съдържа производни на функцията $w(x)$ до m -ти ред, което облекчава подбора на апроксимиращите функции.

За едномерна област провисването се търси в следния вид:

$$(2) \quad w(x) = p(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i \quad .$$

За едномерна гранична задача, описвана с диференциално уравнение от 4-ти ред за огъване на гредата $2m = 4$, като се има предвид (1) за степента на полинома се получава $n = 3$. Интерполиращият полином ще има вида

$$(3) \quad p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad .$$

Неизвестните параметри α_i се определят от условията за непрекъснатост на полиномните функции:

$$(4) \quad \begin{aligned} p(0) = w(0) = q_1; \quad \frac{\partial p(0)}{\partial x} = \frac{\partial w(0)}{\partial x} = q_2; \\ p(\ell) = w(\ell) = q_3; \quad \frac{\partial p(\ell)}{\partial x} = \frac{\partial w(\ell)}{\partial x} = q_4; \end{aligned}$$

След определяне на коефициентите α_i и заместването им в (2) ще получим интерполиращия полином на крайния елемент:

$$(5) \quad w(x) = \sum_{i=1}^4 q_i E_i(x) \quad ,$$

където с $E_i(x)$ са означени едномерните функции на Ермит [1].

С помощта на функциите на Ермит се определят коефициентите на матрицата на коравините:

$$(6) \quad k_{ik} = EI \int_0^{\ell} E_i''(x) E_k''(x) dx, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

и елементите на вектора на възловите натоварвания:

$$(7) \quad P_i = EI \int_0^{\ell} q(x) E_i(x) dx, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

При решаването на динамични задачи апроксимиращата функция се задава във вида (5), но се включва фактора време:

$$(8) \quad w(x, t) = \sum_{i=1}^4 q_i(t) E_i(x)$$

При разглеждането на статичната задача може да се очаква, че полиномът (3) ще даде точните стойности за провисването във всички точки по дължината на елемента. Очевидно същото не се отнася за динамичната задача тъй като решението на диференциалното уравнение на трептенията има свършено друг вид. Затова точността на решението е в пряка връзка с броя на точките на дискретизация дори за призматична греда.

При решаването на динамичните задачи се използват същите функции на Ермит, определени при решаването на съответните статични задачи.

С тяхна помощ се определят елементите на матриците на масата и съпротивлението съответно:

$$(9) \quad m_{ik} = \rho \int_0^a E_i E_k dx ;$$

$$b_{ik} = \beta \int_0^a E_i E_k dx .$$

Очевидно тези коефициенти, които се отнасят за възловите точки, се определят приблизително.

2.2. Същност на трансляционния метод (ТМ)

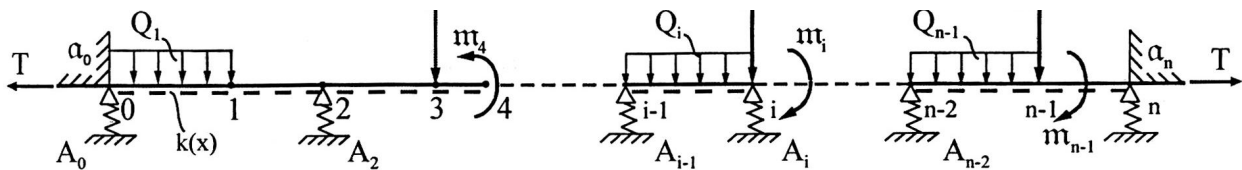
Трансляционният метод се отнася към групата числени методи, основани на предварителната дискретизация на физическия модел. Теоретичните постановки на метода са развити в [2]. Неговата същност ще бъде разкрита за едномерна конструкция в най-обща постановка - непрекъсната призматична греда на еластични опори и еластична основа, натоварена с произволна система от статични или динамични сили, в това число надлъжна сила (фиг. 1). От тази схема може да се премине към различни частни случаи, например не-призматична греда със свободни краища.

Непрекъснатата греда се разделя на n - участъци, като точките на дискретизация се съобразяват с геометричните особености на конструкцията, в това число с разположението на опорите и характера на външното натоварване. В рамките на всеки участък, подобно на обобщения метод на началните параметри и МКЕ геометричните и физичните параметри на гредата се приемат неизменни; разпределеното натоварване се приема за равномерно.

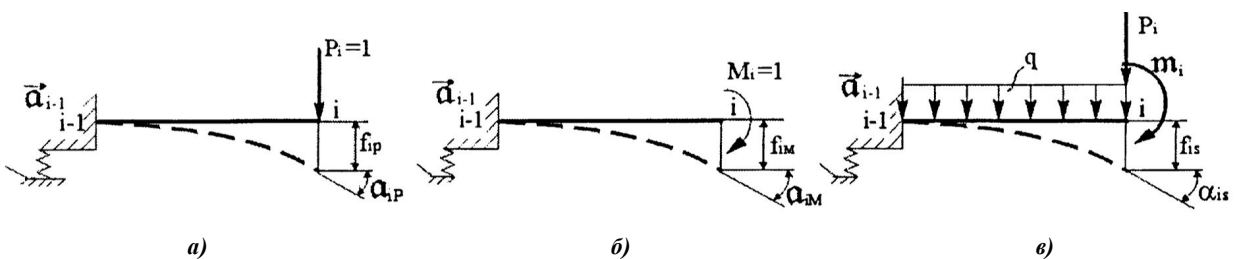
При извода на зависимостите на ТМ за произволен участък от гредата се въвеждат следните характеристики, наречени "частични" ("парциални"), с което се подчертава, че се отнасят за част от конструкцията:

- "Частични" податливости за разглежданото сечение на гредата, отнасящи се за лявата или дясната отсечени части (фиг. 2а и фиг. 2б), където:

- f_{iP} - вертикална податливост от единична сила в т. i ;
- α_{iP} - ъглова податливост от единична сила в т. i ;
- f_{iM} - вертикална податливост от единичен момент в т. i ;
- α_{iM} - ъглова податливост от единичен момент в т. i .



Фиг. 1. Дискретизация на непрекъсната греда



Фиг. 2. Схема за определяне на частичните параметри

"Частичните" податливости обобщено ще означим с

$$(10) \quad \bar{\alpha}_i = \begin{Bmatrix} f_{iP} \\ f_{iM} \\ \alpha_{iP} \\ \alpha_{iM} \end{Bmatrix}$$

- "Частични" ("парциални") премествания за разглежданото сечение на гредата, които се отнасят за лявата ѝ част (вж. фиг. 2а) където:

f_{is} е вертикално преместване в т. i от всички силови въздействия S на съответната отсечена част на гредата;

α_{is} - ъгъл на завъртане на напречното сечение в т. i от всички силови въздействия S на съответната отсечена част на гредата.

За всяка точка на дискретизация, включително точките, в които са разположени опорите, започвайки от единия край на гредата, например левия, последователно се определят частичните характеристики на гредата. Последните в същата последователност формират граничните условия на левия край на всеки един от разглежданите участъци при определянето на частичните характеристики за поредната точка на гредата, съвпадаща с десния край на съответния участък.

За определянето на частичните характеристики над опорните точки първоначално се определят неизвестните "частични" реакции за съответните отрязани части на гредата от условието за непрекъснатост на деформациите над съответните опори.

Пълните характеристики на напрегнатото и деформираното състояние на непрекъснатата гредата се определят в следната последователност: Първоначално се определят неизвестните усилия в най-крайното (най-дясното) сечение на гредата от условията за непрекъснатост на деформациите. След това усилията и преместванията във всички точки на дискретизация се определят при т.н. "обратна трансляция".

Терминът "трансляция" означава, че се извършва предаване на силово-деформационните характеристики на гредата от един участък на друг, което се осъществява чрез зависимости, свързващи частичните характеристики на две последователни точки.

За определянето на частичните характеристики на системата се използват решенията на съответните линейни диференциални уравнения на огъване на гредата в статична и динамична постановка.

3. Изследване на влиянието на дискретизацията

А. Статистически задачи

Разгледана е стоманена конзолна призматична гредата с дължина $\ell = 80 \text{ in}$, в свободния край на която е приложена сила $F = 50 \text{ lb}$, напречното сечение е квадратно с размери $2 \times 2 \text{ in}$. Гредата е разделена на 10

и 40 елемента. Резултатите от изчисленията на провисването в края на гредата и огъващия момент в опорното сечение по МКЕ, получени с програмния пакет COSMOS/M са представени в табл. 1. За сравнение в същата таблица са представени резултатите от изчисленията на посочените параметри чрез известни аналитични формули от справочната литература [3].

За ТМ тази проверка не е необходима. При $n = 1$ и произволна стойност на n резултатите от изчисленията са едни и същи, съвпадащи с тези в табл. 1.

Таблица 1

Резултати от изчисленията на конзолна призматична гредата

Метод	Брой елементи	$w(\ell), \text{in}$	$M(0), \text{lb in}$
МКЕ	10	- 0,2133	- 4 000
	40	- 0,2133	- 4 000
Аналитични изрази [3]	-	- 0,2133	- 4 000

Б. Динамични задачи

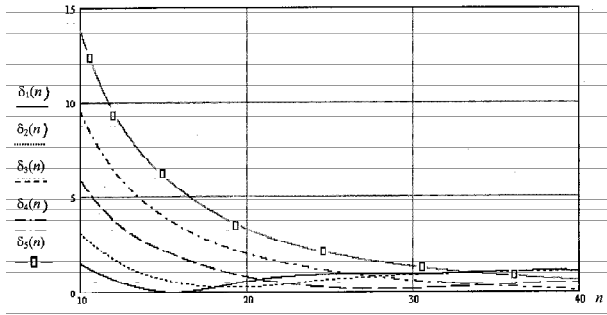
Б.1. Призматична гредата

За определяне на броя на елементите, осигуряващ необходимата точност на изчисляваните собствени честоти е извършен честотен анализ на призматична гредата със свободни краища с характеристики на 40 000 dwt кораб: дължина на гредата $L = 177,00 \text{ m}$; инерционен момент на напречното сечение $I_0 = 82,80 \text{ m}^4$; лице на срязване $\omega_0 = 0,46 \text{ m}^2$; интензивност на масите $m_0 = 587,4 \text{ t / m}$; инерционен радиус $r = 5,4 \text{ m}$; относителен масов инерционен момент на завъртане на напречните сечения $r / \ell = 0,03$; отношение на лицето на напречното сечение на гредата към лицето на срязване $F / \omega_0 = 6,41$. Гредата е разделена на 10, 20, 30 и 40 елемента. За прилагане на ТМ е използван програмен пакет *Mathcad Professional* [4]. Получените собствени честоти за първите пет тона от основния спектър са представени в табл. 2. На фиг. 3 е представено в графичен вид изменението относителната грешка $\delta(n)$ на собствените честоти, изчислени по МКЕ, в зависимост от броя на елементите n , на които е разделена гредата.

Таблица 2

Собствени честоти на призматична гредата със свободни краища

Метод	Брой елементи	Собствени честоти, Hz				
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
МКЕ	10	0,546	1,231	1,941	2,579	3,124
	20	0,557	1,273	2,045	2,792	3,502
	30	0,559	1,281	2,064	2,832	3,574
	40	0,56	1,284	2,071	2,846	3,599
Честотни уравнения [4]	-	0,554	1,270	2,061	2,848	3,621
ТМ	10	0,554	1,270	2,061	2,848	3,621
	40	0,554	1,270	2,061	2,848	3,621



Фиг.3. Относителна грешка $\delta(n)$ на първите пет собствени честоти на трепене на призматична греда в зависимост от броя на елементите на дискретизация, n

Б.2. Непризматична греда - аналитичен тип

Приема се, че инерционният момент и масата на 40 000 dwt кораба се разпределят съгласно изразите:

$$I(x) = I_0 \left(0,2 + 0,8 \cos \frac{\pi x}{\ell} \right) ,$$

$$m(x) = m_0 \left(0,2 + 1,265 \cos \cos \frac{\pi x}{\ell} \right)$$

при начало на координатната система в средата на кораба.

В табл. 3 са представени резултатите от изчисленията на първите пет собствени честоти на непризматичната греда.

Таблица 3

Собствени честоти на непризматична греда със свободни краища - аналитичен модел на кораб

Метод	Брой елементи	Собствени честоти, [Hz]				
		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
МКЕ	10	0,6	1,186	1,759	2,275	2,719
	20	0,622	1,248	1,887	2,502	3,087
	30	0,626	1,259	1,912	2,546	3,162
	40	0,627	1,263	1,918	2,559	3,184
ТМ	10	0,623	1,284	2,007	2,748	3,493
	20	0,634	1,307	2,04	2,787	3,536
	30	0,636	1,311	2,046	2,794	3,544
	40	0,637	1,312	2,047	2,796	3,547

4. АНАЛИЗ НА ПОЛУЧЕНИТЕ РЕЗУЛТАТИ

При статически задачи резултатите, получавани по двата метода (МКЕ и ТМ) не се влияят от броя на точките на дискретизация. При решаването на динамически задачи погрешността от дискретизацията е съществена при МКЕ даже за призматични греди. Резултатите, получавани съгласно ТМ при статически и динамически задачи не се влияе от броя на точките на дискретизация. За МКЕ съществува минимално число точки на дискретизация, равно на номера на тона на търсената честота, при което методът е приложим [4]. Освен това, както се вижда от фиг. 3 съществува

оптимален брой елементи, при който грешката от дискретизация при МКЕ е най-малка; при по-малък и по-голям брой - грешката нараства.

При непризматични греди влиянието на дискретизацията при МКЕ е по-силно от това при ТМ. Така например при изменение на n от $n = 10$ до $n = 40$ съгласно МКЕ честотата f_5 се променя със 17 %. В същото време при ТМ това изменение е само 1,5 %. Освен това крайните резултати по двата метода при $n = 40$ значително се различават. Например отноше-

нието $\frac{f_5^{TM}}{f_5^{MKE}} = 1,11$, което се дължи на приблизител-

ния характер на апроксимиращата функция за провисването w , приета в МКЕ за решаване на динамически задачи.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Въз основа на направените изследвания могат да се направят следните изводи:

1. Точността на ТМ не зависи от броя на точките на дискретизация при решаването както на статически задачи, така и на динамически задачи за призматични греди, тъй като в неговия алгоритъм са заложени точни зависимости за определяне на провисването $w(x)$.

2. Точността на МКЕ също не зависи от броя на точките на дискретизация при решаването на статически задачи за призматични греди. Но тази точност е в пряка зависимост от дискретизацията при динамически задачи. Съществува оптимален брой точки на дискретизация, при който погрешността на резултатите е минимална. Основната причина за посочената зависимост произтича от използваните функции на Ермит, влизащи в изразите за провисването $w(x)$. Тези функции точно описват провисването между точките на дискретизация при статически задачи. Същите функции на Ермит са заложени в алгоритмите съгласно МКЕ при решаването на динамически задачи, което предопределя приблизителния характер на получаваните резултати даже за призматични греди.

3. За непризматични греди получаваните резултати зависят в по-голяма степен от броя на точките на дискретизация при МКЕ в сравнение с ТМ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. П о с т н о в, В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. Ленинград, Судостроение, 1977.
 2. А п о с т о л о в, В. С. Същност и основни зависимости на транслационния метод. Годишник на Института по корабостроене - Варна, 1986.
 3. С п р а в о ч н и к по строительной механике корабля, т. 1. Ленинград, Судостроение, 1982.
 4. И в а н о в а, Хр. Г. Изследване на общите вертикални свободни вибрации на кораба. Дисертация за получаване на образователната и научната степен "Доктор". Варна, 2005.